پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره ۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صص ۱-۱۸
نوع مقاله: پژوهشی

انتخاب سبد سهام فازی با بررسی همزمان بازده و ریسک نامطلوب

مجتبی فرخ*

استادیار، گروه مدیریت عملیات و فناوری اطلاعات، دانشکده مدیریت، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱۰/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۰۹

چکیده:
مسئله بهینه‌سازی و انتخاب سبدسهام و تنوع بخشی آن یکی از موضوعات جذاب و کاربردی در بازارهای مالی است که به‌عنوان ابزاری کارآمد در راستای کمک به تصمیم‌گیری‌های سرمایه گذاران از نتایج آن استفاده می‌شود. مقاله حاضر به مدلسازی انتخاب سبد سهام با در نظر گرفتن محدودیت حدود نسبت‌های سرمایه‌گذاری جهت بهینه‌سازی همزمان بازده و ریسک در شرایط عدم اطمینان فازی می‌پردازد. برای این منظور، دو مدل برنامه‌ریزی امکانی جدید با بکارگیری اندازه‌های میانگین و ریسک نامطلوب احتمالی و امکانی بازده فازی توسعه داده می‌شود. با بررسی عملکرد این مدل‌ها با استفاده از داده‌های مارکویتز و بورس اوراق بهادار تهران، نتایج نشان می‌دهد که این مدل‌ها قادر هستند با بهینه‌سازی همزمان بازده و ریسک، سبد سهام مناسب را با توجه به مقادیر مختلف حدود نسبت‌های سرمایه گذاری براساس گرایش‌ها و استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاران ارائه دهد.

کلید واژه‌ها: برنامه‌ریزی امکانی، سبد سهام فازی، ریسک نامطلوب، میانگین احتمالی و امکانی.

---

* نویسنده مسئول مقاله E-mail: farrokh@khu.ac.ir

۱- مقدمه

انتخاب سبد سهام به منظور بهینه‌سازی سود و ریسک یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه-گذاران در بازارهای مالی است. در تئوری سبد سهام بهینه، تخصیص بهینه سرمایه و انتخاب سبد بهینه بر اساس رابطه بازده و معیارهای ریسک نامطلوب[1] انجام می‌گیرد. در مسئله انتخاب سبد سهام ثروت اشخاص بین انواع مختلفی از اوراق بهادار به گونه‌ای تقسیم می‌شود که اهداف سرمایه‌گذاری تحقق یابد. روش میانگین–واریانس برای مسئله انتخاب سبد سهام که اولین بار توسط مارکویتز [2]پیشنهاد شد، نقش مهمی در توسعه تئوری انتخاب سبد سهام داشته است [۱]. بر اساس نظریه مارکویتز، شخص برای یک سطح معین از بازده، می‌تواند با حداقل کردن واریانس سرمایه‌گذاری، ریسک سبد سهام را حداقل کند، یا در سطح معینی از ریسک که برای سرمایه‌گذار قابل قبول باشد، نرخ بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری را حداکثر سازد [۲]. مارکویتز تئوری احتمال را با تکنیک‌های بهینه‌سازی برای مدلسازی رفتار سرمایه‌گذاری تحت عدم اطمینان ترکیب کرد. اصل کلیدی مدل میانگین–واریانس مارکویتز استفاده از متوسط بازدهی سبد سهام به صورت بازدهی سرمایه‌گذاری و واریانس بازدهی سبد سهام به صورت ریسک سرمایه‌گذاری بوده است. با این حال، مدل مارکویتز برای تشکیل سبد سهام با مقیاس بزرگ غیرقابل استفاده است. یکی از مهمترین دلایل آن به کارایی محاسباتی آن در حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دو با مقیاس بزرگ مربوط می‌شود. برای حل این مشکل از اندازه‌های دیگری مثل انحراف مطلق و اندازه‌های دیگر استفاده شده است [۳، ۴]. استفاده از واریانس به صورت اندازه ریسک اغلب با مشکلات دیگری نیز همراه است. اگر توزیع بازدهی دارایی‌ها غیر متقارن باشد، استفاده از واریانس ممکن است با کاهش هر دو انتهای بازدهی پایین و بالا باعث از دست دادن بازدهی بیشتر از میانگین شود. به همین منظور برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی، محققان اندازه‌های ریسک جدید دیگری مانند نیمه واریانس، انحراف نیمه–مطلق و اندازه ریسک نامطلوب را جایگزین واریانس کرده‌اند.

از طرف دیگر، تلاش‌های زیادی برای حل و توسعه مدل مارکویتز جهت کاربردی کردن آنها صورت گرفته است. برای نمونه، محدود نگاه داشتن تعداد دارایی‌ها در سبد سهام با متغیرهای صفر و یک (محدودیت‌های اصلی[3] و تعیین حدود بالا و پایین (محدودیت‌های آستانه[4] بر روی مقداری که در هر دارایی سرمایه‌گذاری می‌شود، از جمله این محدودیت‌ها

هستند. این موارد ناشی از خواسته‌های سرمایه‌گذاران است که جهت کنترل ریسک غیرسیستماتیک سبد سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شوند. به دلیل این ویژگی‌ها طی دهه گذشته مدل مارکویتز خصوصاً از جنبه محاسباتی مورد مطالعه قرار گرفته است [۵، ۶]. این مطالعات نشان می‌دهد که مدل برنامه‌ریزی مارکویتز با اعمال محدودیت بر روی دارایی‌ها، دارای پیچیدگی محاسباتی بیشتری در مقایسه با مدل مارکویتز استاندار است. در واقع، مدل مارکویتز استاندارد یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دو محدب است، در حالی که مدل مارکویتز با محدودیت‌های اعمالی بر روی تعداد دارایی‌ها اغلب با افزودن متغیرهای صفر و یک به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دو عدد صحیح مختلط تبدیل می‌شود. این فرم از مدل مارکویتز در دسته مسائل NP-hard قرار می‌گیرند [۷].

در ابتدا عدم اطمینان با استفاده از ابزارهای تئوری احتمال مورد بررسی قرار می‌گرفت، بطوری که اکثر مدل‌های بهینه‌سازی توسعه یافته مبتنی بر تئوری احتمال هستند. فرض اصلی مدل میانگین–واریانس مارکویتز این است که می‌توان حالات آینده بازدهی دارایی را با داده‌های تاریخی مربوط به بازده دارایی به صورت صحیح منعکس کرد. با این حال، این فرض در بازارهای پویای دارایی‌های واقعی به ندرت اتفاق می افتد. به رغم اینکه تئوری احتمال یکی از تکنیک‌های اصلی مورد استفاده در تحلیل عدم اطمینان در مباحث مالی است، رفتار بازارهای مالی اغلب با چندین عامل غیر احتمالی مانند ابهام و سربسته‌گی متأثر است [۸]. در اکثر موارد داده‌های تاریخی برای تخمین توزیع احتمال مقادیر وجود ندارد یا تهیه آنها هزینه زیادی را خواهد داشت؛ گاهی اوقات نیز مقادیر تخمینی برای احتمالات خیلی مبهم هستند و در نظر گرفتن آنها بصورت مقادیر قطعی نیز عملاً غیر قابل استفاده است [۹،۱۰]. با معرفی تئوری مجموعه‌های فازی توسط لطفی‌زاده [۱۱]، تعدادی از محققان به این نتیجه رسیدند که می‌توان از این تئوری برای مدیریت سبد سهام در نوع دیگری از فضای تصمیم‌گیری به نام محیط فازی استفاده کرد. در این زمینه محققان روش‌های مختلفی با رویکرد برنامه‌ریزی امکانی برای مسئله سبد سهام توسعه داده‌اند [۱۲، ۱۳]. برنامه‌ریزی فازی شامل دو رویکرد برنامه‌ریزی انعطاف پذیر[۱] و برنامه‌ریزی امکانی[۲] است. در رویکرد اول با در نظر گرفتن توابع عضویت اقناع برای توابع هدف و محدودیت‌ها در قالب تابع مطلوبیت، مسئله در غالب یک مسئله تک هدفه مدلسازی می‌شود. از جمله کاربردهای این رویکرد در بهینه‌سازی مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه است. در رویکرد برنامه‌ریزی امکانی مقادیر توابع هدف و محدودیت‌های مسئله در غالب توابع

توزیع امکانی همچون توابع احتمال مدلسازی می‌شوند [۱۰]. در این تحقیق با توجه به محیط فازی که بر مسئله انتخاب سبد سهام حاکم است، یک مدل برنامه‌ریزی امکانی مبتنی بر میانگین واندازه ریسک نامطلوب برای کنترل بازده فازی توسعه داده می‌شود. در این مدل ریسک بازده جهت بهینه‌سازی همراه بازده فازی در تابع هدف آورده می‌شود. همچنین، بازدهی و ریسک به ترتیب به وسیله مقدار میانگین احتمالی و امکانی و انحراف مطلق احتمالی و امکانی مربوط به بازده فازی اندازه‌گیری می‌شود.

۲- پیشینه پژوهش

مسائل بهینه‌سازی سبد سهام از اوایل ۱۹۵۲ با پیشگامی مارکویتز مورد توجه محققان قرار گرفته است. در توسعه مدل سبد سهام مارکویتز، برای حل مشکلات مربوط به واریانس، کانو و یامازاکی[۱](۱۹۹۱) از تابع ریسک انحراف مطلق به جای تابع ریسک درجه دو مدل مارکویتز استفاده کردند و یک مدل بهینه‌سازی سبد سهام میانگین انحراف مطلق پیشنهاد کردند [۴]. این مدل با حفظ ویژگی‌های مطلوب مدل مارکویتز، تقریباً کل مشکلات مربوط به کارایی محاسباتی مدل مارکویتز را برطرف می‌کند. اسپرانزا[۲](۱۹۹۳) از انحراف نیمه–مطلق برای اندازه‌گیری ریسک مدل انتخاب سبد سهام استفاده کرد [۳]. انستین[۳](۱۹۹۳) متوسط انحراف مطلق را برای اندازه‌گیری ریسک پیشنهاد کرد [۱۴]. یان[۴] و همکاران (۲۰۰۷) به جای واریانس از نیمه واریانس به صورت اندازه ریسک برای بررسی مسئله انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کردند [۱۵]. پینار[۵](۲۰۰۷) از اندازه ریسک نامطلوب در مسئله انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کرد [۱۶]. لئو[۶] و همکاران (۲۰۱۳) و ژانگ[۷] و ژانگ (۲۰۱۴) نیز با در نظر گرفتن هزینه معاملاتی خطی، درجه تنوع بخشی سبد سهام و چولگی، به ترتیب از الگوریتم ژنتیک و الگوریتم تکاملی هوشمند برای انواع مدل‌های انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کردند [۱۷، ۱۸].

در زمینه برنامه‌ریزی امکانی، واتادا[۸](۱۹۹۷) و لئون[۹] و همکاران (۲۰۰۲) مسئله انتخاب سبد سهام را با استفاده از تئوری تصمیم فازی مورد بررسی قرار دادند [۱۹، ۱۲]. تاناکا و گائو[۱۰] (۱۹۹۹) دو نوع مدل انتخاب سبد سهام را با استفاده از احتمالات فازی و توزیع‌های امکانی نمائی پیشنهاد کردند [۲۰]. اینگوچی و تانینو[۱](۲۰۰۰) رویکرد برنامه‌ریزی امکانی برای مسئله انتخاب سبد سهام تحت معیارهای تأسف min-max[۲] را معرفی کردند [۲۱]. فرخ و همکاران،

وانگ و زو[۱](۲۰۰۲) و گیو[۲]و همکاران (۲۰۰۶) مدل‌های برنامه‌ریزی بازه‌ای را برای مسئله طراحی زنجیره تأمین و انتخاب سبد سهام توسعه دادند (۲۲، ۲۳، ۲۴). ایدا[۳](۲۰۰۴) مسئله انتخاب سبد سهام را با ضرایب بازه‌ای و فازی مورد بررسی قرار داد و دو نوع از جواب‌های کارا را معرفی کرد که شامل جواب کارای امکانی به صورت جواب خوشبینانه و جواب کارای الزامی به صورت جواب بدبینانه بودند [۲۵]. کارلسون[۴]و همکاران (۲۰۰۲) با این فرض که بازدهی دارایی‌ها به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای هستند یک رویکرد امکانی برای انتخاب سبد سهام با بالاترین مقدار مطلوبیت پیشنهاد کرد [۲۶]. وانگ[۵]و همکاران (۲۰۰۵) و ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴) مسائل انتخاب سبد سهام امکانی موزون عمومی را مورد بررسی قرار دادند [۲۷، ۱۸]. علاوه بر این، لاکاگنینا و پکورلا[۶](۲۰۰۶) یک برنامه‌ریزی فازی با محدودیت‌های نرم تصادفی چندمرحله‌ای با بازگشت را برای در نظر گرفتن همزمان عدم اطمینان تصادفی و فازی برای حل مسئله مدیریت سبد سهام پیشنهاد کردند [۲۸].

کارلسون و فولر (۲۰۰۲) مقدار میانگین امکانی تحتانی و فوقانی یک عدد فازی را معرفی کردند که به صورت توزیع‌های امکانی است [۲۶]؛ این تعریف با اصل گسترش لطفی‌زاده (۱۹۷۸) سازگار بوده و همچنین مبتنی بر مجموعه برش است [۲۹]. لئو و همکاران (۲۰۱۳) مدل‌های انتخاب سبد سهام مبتنی بر میانگین‌های امکانی فوقانی و تحتانی و واریانس‌های امکانی اعداد فازی را معرفی کردند [۱۷]. در مدل ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴) انحراف مطلق به صورت یک محدودیت تعریف می‌شود و حد فوقانی آن توسط ترجیحات تصمیم‌گیرندگان تعیین می‌شود [۱۸]. در حقیقت، در این فرمول‌بندی ریسک تابع هدف جهت بهینه‌سازی در تابع هدف آورده نمی‌شود. ریسک تایع هدف جهت بهینه‌سازی همراه بازده فازی در تابع هدف آورده می‌شود.

۳- روش شناسی پژوهش

در رویکرد پیشنهادی، بازدهی و ریسک به ترتیب به وسیله مقدار میانگین احتمالی و امکانی و انحراف مطلق احتمالی و امکانی مربوط به بازده فازی اندازه‌گیری می‌شود. در این قسمت بعد از معرفی این تعاریف و مقدمات مورد نیاز، به مدلسازی مسئله سبد سهام پرداخته خواهد شد.

۱-۳- تعاریف و مقدمات

دابوا و پراد[1](۱۹۸۷) میانگین با ارزش بازه‌ای یک عدد فازی را به صورت یک بازه بسته معرفی کردند که حدود آن با میانگین‌هایی بدست آمده از مقادیر میانگین احتمالی تحتانی و فوقانی مشخص می‌شود [۳۰]. همچنین، کارلسون و فولر[2](۲۰۰۲) میانگین با ارزش بازه‌ای یک عدد فازی را معرفی کردند که حدود آن میانگین‌هایی است که از مقادیر میانگین امکانی تحتانی و فوقانی بدست می‌آید [۲۶]؛ این تعریف با اصل گسترش لطفی زاده [۲۹] سازگار بوده و همچنین مبتنی بر مجموعه برش است.

تعاریف مختلفی از متوسط عدد فازی برای ارزیابی بازده مورد انتظار یک سبد سرمایه-گذاری می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که در تعریف ۲ و ۳ آورده شده است. در قسمت زیر برخی از تعاریف و نتایج مورد نیاز را به صورت مختصر یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱. عدد فازی $\tilde{A}$ یک عدد فازی از نوع LR، $\tilde{A}=(\underline{a},\overline{a},\alpha,\beta)_{LR}$، بوده که دارای تابع عضویت زیر است [۳۰]:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\underline{a}-x}{\alpha}\right) & \underline{a}-\alpha\le x\le \underline{a} \\ 1 & \underline{a}\le x\le \overline{a} \\ R\left(\dfrac{\overline{a}-x}{\beta}\right) & \overline{a}\le x\le \overline{a}+\beta \end{cases} \qquad (۱)$$

تابع ارجاع $L:[0,1]\to[0,+\infty]$ و $R:[0,1]\to[0,+\infty]$ بر روی مجموعه حامی $(\tilde{A})=\{x:\mu_{\tilde{A}}(x)>0\}$، کاهنده و نیمه پیوسته فوقانی هستند به طوری که $L(x)=L(-x),R(x)=R(-x)$ و $L(0)=R(0)=1$.

در مسئله انتخاب سبد سهام استاندارد، یک سرمایه‌گذار در خصوص نسبتی از کل ثروت خود که به دارایی j ام (x_j) تخصص می‌دهید، تصمیم‌گیری می‌کند. با فرض اینکه $\tilde{R}_j=(\underline{a}_j,\overline{a}_j,\alpha_j,\beta_j)$ بازدهی فازی دارایی j ام باشد، مقدار بازدهی فازی یک سبد سرمایه-گذاری را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\tilde{R}=(\sum_j \underline{a}_j x_j,\sum_j \bar{a}_j x_j,\sum_j \alpha_j x_j,\sum_j \beta_j x_j)_{LR}= (\underline{R}(x),\bar{R}(x),\alpha(x),\beta(x))_{LR} \quad (۲)$$

تعریف ۲. مقادیر میانگین احتمالی تحتانی و فوقانی عدد فازی $\tilde{R}$ در روش دابوا و پراد [۳۰] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_*(\tilde{R})=\int_0^1(\inf \tilde{R}_\rho)\,d\rho=\underline{R}(x)-\alpha(x)/2$$
$$E^*(\tilde{R})=\int_0^1(\sup \tilde{R}_\rho)\,d\rho=\bar{R}(x)+\beta(x)/2 \quad (۳)$$

همچنین برای مقادیر میانگین امکانی تحتانی و فوقانی عدد فازی $\tilde{R}$ در روش کارلسون و فولر (۲۰۰۲)[۲۸] داریم:

$$M_*(\tilde{R})=2\int_0^1\rho(\inf \tilde{R}_\rho)\,d\rho=\underline{R}(x)-\alpha(x)/3,$$
$$M^*(\tilde{R})=2\int_0^1\rho(\sup \tilde{R}_\rho)\,d\rho=\bar{R}(x)+\beta(x)/3, \quad (۴)$$

$\inf \tilde{R}_\rho$ و $\sup \tilde{R}_\rho$ به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست برش سطح ρ را برای $\rho\in[0,1]$ نشان می‌دهند.

میانگین احتمالی و امکانی با ارزش بازه‌ای به صورت فواصل زیر بیان می‌شود:

$$E(\tilde{R})=[E_*(\tilde{R}),E^*(\tilde{R})] \quad (۵)$$

$$M(\tilde{R})=[M_*(\tilde{R}),M^*(\tilde{R})] \quad (۶)$$

ثابت شده است که میانگین امکانی با ارزش بازه‌ای زیرمجموعه‌ای از میانگین احتمالی با ارزش بازه‌ای است [۲۶].

تعریف ۳. $\tilde{R}$ را یک عدد فازی در نظر بگیرید. سپس، میانگین احتمالی و امکانی قطعی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶، ۳۰]:

$$\bar{E}(\tilde{R})=\left(E^*(\tilde{R})+E_*(\tilde{R})\right)/2=\frac{\underline{R}(x)+\bar{R}(x)}{2}+\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{4} \quad (۷)$$

$$\bar{M}(\tilde{R})=\left(M^*(\tilde{R})+M_*(\tilde{R})\right)/2=\frac{\underline{R}(x)+\bar{R}(x)}{2}+\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{6} \quad (۸)$$

با این تعریف، مقدار میانگین احتمالی و امکانی بازده فازی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{E}(\tilde{R}) = \sum_j \left(\frac{\bar{a}_j + \underline{a}_j}{2} + \frac{\beta_j - \alpha_j}{4}\right)x_j \tag{۹}$$

$$\bar{M}(\tilde{R}) = \sum_j \left(\frac{\bar{a}_j + \underline{a}_j}{2} + \frac{\beta_j - \alpha_j}{6}\right)x_j \tag{۱۰}$$

۲-۳- فرمول‌بندی سبد سهام فازی

در مسئله انتخاب سبد سهام، در مورد استراتژی بهینه سرمایه‌گذاری برای تشکیل سبد سهام مناسب با در نظر گرفتن توازن بین حداکثرسازی بازدهی و حداقل‌سازی ریسک نامطلوب سرمایه‌گذاری تصمیم‌گیری می‌شود. برای این منظور لازم است متوسط بازدهی و ریسک سبد سهام را مشخص کنیم. در مدل اولیه می‌توان با تعیین یک سطح متوسط بازدهی که از قبل توسط تصمیم‌گیرنده تعیین شده است، بازدهی ریسک را حداقل می‌سازیم. با این حال، در تحقیق حاضر جهت بهینه‌سازی همزمان بازدهی و ریسک، این مقادیر همزمان در تابع هدف قرار می‌گیرند و جهت ایجاد توازن بین آنها از ضریب ریسک در عبارت اندازه ریسک استفاده می‌کنیم.

مدل‌های مختلفی برای انتخاب سبد سهام در چارچوب تبادل ریسک و بازدهی فازی وجود دارد. مسئله فازی انتخاب سبد سهام را می‌توان با معرفی برخی روابط ترجیحی بین اعداد بازه‌ای مورد تحلیل قرار داد [۲۱]؛ با این حال در این پژوهش از دو رویکرد قطعی سازی دابوا و پراد (۱۹۸۷) و کارلسون و فولر (۲۰۰۲) برای مدلسازی انتخاب سبد سهام استفاده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه می‌شود [۳۰، ۲۸]. در تابع هدف مدل‌های پیشنهادی، میانگین ریسک نامطلوب فازی به صورت یک عبارت قطعی حداقل و متوسط بازدهی قطعی حداکثر می‌شود.

مدل قطعی (۱) مطابق با روش قطعی سازی متوسط ریسک نامطلوب و بازدهی فازی دابوا و پراد (۱۹۸۷) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \bar{E}(\tilde{R}) - \lambda \bar{E}\left(\max\{0, M(\tilde{R}) - \tilde{R}\}\right) \\
&= \sum_j \left(\frac{\bar{a}_j + \underline{a}_j}{2} + \frac{\beta_j - \alpha_j}{4}\right)x_j - \lambda \sum_j \left(\bar{a}_j - \underline{a}_j + \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right)x_j \\
&s.t.\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
&\quad l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

همچنین اگر مطابق با روش کارلسون و فولر (۲۰۰۲) متوسط ریسک نامطلوب و بازدهی امکانی مورد استفاده قرار گیرد، مدل قطعی (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\max \bar{M}(\tilde{R}) - \lambda \bar{M}\left(\max\{0, M(\tilde{R}) - \tilde{R}\}\right)$$
$$= \sum_j \left(\frac{\bar{a}_j + \underline{a}_j}{2} + \frac{\beta_j - \alpha_j}{6}\right) x_j - \lambda \sum_j \left(\bar{a}_j - \underline{a}_j + \frac{\alpha_j + \beta_j}{3}\right) x_j \qquad (۱۲)$$
$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$
$$l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, \dots, n$$

در واقع، برای اینکه انحرافات از متوسط بازدهی فازی را حداقل کنیم، میانگین اندازه‌های ریسک نامطلوب حداقل ساخته می‌شود. در تابع هدف مدل‌های فوق، عبارت اول بازده کل دارایی‌ها و عبارت دوم مقدار ریسک دارایی‌ها را نشان می‌دهد. ضریب (λ) در عبارت دوم، ضریب ریسک است که جهت کنترل مقدار ریسک و بازده مورد استفاده قرار می‌گیرد. با انتخاب مقادیر بزرگ برای این ضریب، بر اهمیت ریسک دارایی‌ها در برابر مقدار بازدهی دارایی‌ها افزوده می‌شود. مقادیر l_j و u_j به ترتیب حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری بر روی دارایی‌ها را نشان می‌دهند. روشن است که محدودیت‌های مدل‌های فوق برای تنوع بخشی به سبد سهام حاصل از تسهیم ثروت بر روی دارایی‌های مختلف بکار می‌روند. همچنین فرض می‌کنیم نسبت سرمایه‌ای است که در هر دارایی سرمایه‌گذاری می‌شود (حدود تحتانی و فوقانی)، توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود که شروط متنوع سازی سبد سهام هستند.

قضیه. فرض کنید نرخ بازدهی دارایی‌ها با اعداد فازی LR ذوزنقه‌ای مدلسازی شود، می‌دانیم ریسک نامطلوب توصیف منطقی‌تری از ترجیحات سرمایه‌گذاران از ریسک سرمایه‌گذاری است، چون این اندازه ریسک تنها انحرافات منفی از متوسط بازدهی را جریمه می‌کند. در مدل‌های پیشنهادی اندازه ریسک نامطلوب احتمالی و امکانی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{E}\left(\max\{0, E(\tilde{R}) - \tilde{R}\}\right) = \frac{\bar{R}(x) - \underline{R}(x)}{2} + \left(\frac{\beta(x) + \alpha(x)}{4}\right) \qquad (۱۳)$$

$$\bar{M}\left(\max\{0, M(\tilde{R}) - \tilde{R}\}\right) = \frac{\bar{R}(x) - \underline{R}(x)}{2} + \left(\frac{\beta(x) + \alpha(x)}{6}\right) \qquad (۱۴)$$

اثبات: با توجه به اینکه عملیات اثبات هر دو رابطه فوق مشابه هم است، در این قسمت تنها رابطه ۱۴ را اثبات می‌کنیم. مقدار ریسک نامطلوب فازی (میانگین نیمه انحراف مطلق) بازده

فازی ذوزنقه‌ای براساس رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{M}\left(\max\{0, M(\tilde{R})-\tilde{R}\}\right)$$

در این رابطه برای مقایسه بازه فازی $M(\tilde{R})$ با بازده فازی LR ($\tilde{R}$)، فرض می‌کنیم بـازه فازی یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با پهنای چپ و راست صـفر اسـت، در ایـن صـورت عـدد فـازی ذوزنقه‌ای $(\underline{R}(x)-\frac{\alpha(x)}{3}, \bar{R}(x)+\frac{\beta(x)}{3}, 0, 0)_{LR}$ را خواهیم داشـت. لـذا می‌تـوان محاسـبات زیر را انجام داد:

$$M(\tilde{R})-\tilde{R} = (\underline{R}(x)-\frac{\alpha(x)}{3}, \bar{R}(x)+\frac{\beta(x)}{3}, 0, 0)_{LR} - (\underline{R}(x), \bar{R}(x), \alpha(x), \beta(x))_{LR}$$
$$= (\underline{R}(x)-\bar{R}(x)-\frac{\alpha(x)}{3}, \bar{R}(x)-\underline{R}(x)+\frac{\beta(x)}{3}, \beta(x), \alpha(x))_{LR} \quad (۱۵)$$

برای بدست آوردن ریسک نـامطلوب، بـا فـرض اینکـه صـفر یـک عـدد فـازی بـه صـورت $(0,0,0,0)$ است، حداکثر این دو عدد فازی را بدست می‌آوریم [۳۰]:

$$\max\{0, M(\tilde{R})-\tilde{R}\} = (0, \bar{R}(x)-\underline{R}(x)+\frac{\beta(x)}{3}, 0, \alpha(x))_{LR} \quad (۱۶)$$

حال میانگین امکانی عدد فازی حاصله را می‌توان محاسبه کرد:

$$\bar{M}(\max(0, M(\tilde{R})-\tilde{R})) = \frac{\bar{R}(x)-\underline{R}(x)}{2}+\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{6} \quad (۱۷)$$

که میانگین نیمه انحراف مطلق امکانی بازده فازی است. در نتیجه برای مقادیر ریسک نامطلوب سبد سرمایه‌گذاری داریم:

$$K1(x) = \sum_j (\frac{\bar{a}_j-\underline{a}_j}{2}+\frac{\alpha_j+\beta_j}{4})x_j \quad (۱۸)$$

$$K2(x) = \sum_j (\frac{\bar{a}_j-\underline{a}_j}{2}+\frac{\alpha_j+\beta_j}{6})x_j \quad (۱۹)$$

۴- یافته‌های پژوهش

برای ارزیابی عملکرد مدل‌های پیشنهادی، از مجموعه داده‌هایی که توسط مارکویتز (۱۹۵۲) [۱] معرفی شده است و مجموعه داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استفاده می‌کنیم. فرض کنید سرمایه‌گذاری قصد دارد ثروت خود را بین ۹ دارایی از داده‌های تاریخی مارکویتز تخصیص

دهد که بازدهی سالیانه آن با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_{kj} = (p_{(k+1)j} + d_{kj} - p_{kj}) / p_{kj},$$

p_{kj} قیمت دارای R_j در سال k و d_{kj} سود این دارایی در سال k است. این داده‌ها سال‌های ۱۹۳۷ تا ۱۹۵۴ را پوشش می‌دهند. جدول ۱ خلاصه آمار این داده‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱ آمار بازدهی سالیانه دارایی‌ها (۱۹۵۴– ۱۹۳۷) مربوط به داده‌های تاریخی مارکویتز

بازدهی	میانگین	انحراف استاندارد	صدک پنجم	صدک چهلم	صدک شصدم	صدک نود و پنجم
R1	۰/۰۶۶	۰/۲۳۸	−۰/۲۸۶	−۰/۰۱۱	۰/۰۷	۰/۴۵۶
R2	۰/۰۶۲	۰/۱۲۵	−۰/۱۷۵	۰/۰۵۲	۰/۰۸۹	۰/۲۲۹
R3	۰/۱۴۶	۰/۳۰۱	−۰/۱۹۳	۰/۰۱۸	۰/۱۳۶	۰/۷۵۸
R4	۰/۱۷۳	۰/۳۱۸	−۰/۳۰۷	۰/۱۶۱	۰/۲۳۸	۰/۷۱۴
R5	۰/۱۹۸	۰/۳۶۸	−۰/۴۲۹	۰/۰۶۲	۰/۳۲۵	۰/۶۷۱
R6	۰/۰۵۵	۰/۲۰۹	−۰/۲۳۴	−۰/۰۶۴	۰/۰۹۴	۰/۳۵۲
R7	۰/۱۲۸	۰/۱۷۵	−۰/۱۳۲	۰/۰۹	۰/۱۶۴	۰/۳۵۶
R8	۰/۱۱۸	۰/۲۸۶	−۰/۳۱۱	۰/۱۰۴	۰/۱۹۶	۰/۵۸۷
R9	۰/۱۱۶	۰/۲۹۰	−۰/۳۱۶	۰/۱۰۴	۰/۱۹۶	۰/۵۸۷

در مدل‌های فازی، این مشاهدات برای بازده دارایی‌ها به صورت نمونه در نظر گرفته می‌شوند، لذا از صدک‌های نمونه برای تقریب مرکز و پهنای بازدهی‌های فازی ذوزنقه‌ای این دارایی‌ها استفاده می‌کنیم. برای این منظور، مرکز $[\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ دارایی فازی R_j به صورت بازه $[P_{40}, P_{60}]$ و مقادیر $P_{40} - P_5$ و $P_{95} - P_{60}$ به ترتیب به عنوان پهنای چپ α_j و راست β_j بازده فازی در نظر گرفته می‌شوند. P_k صدک k ام نمونه است. سپس توابع عضویت مربوطه با استفاده از تعریف ۱ به صورت زیر خواهد بود:

$$L(r) = \frac{r - \underline{a}_j - \alpha_j}{\alpha_j} for\ r \in [\underline{a}_j - \alpha_j, \underline{a}_j]$$

$$R(r) = \frac{\bar{a}_j + \beta_j - r}{\beta_j} for\ r \in [\bar{a}_j, \bar{a}_j + \beta_j]$$

همه مسائل بهینه‌سازی با استفاده از نرم افزار لینگو ۱۵ با شروط تنوع بخشی و ضرایب ریسک مختلف حل شد. متوسط بازدهی و ریسک با استفاده از روابط تعریف شده برای

مدل‌های ۱ و ۲ محاسبه شد. جدول ۲ سبد سهامی را نشان می‌دهد که با استفاده از سطوح مختلف ضریب ریسک برای مدل‌های ۱ و ۲ بدست آمده است.

جدول ۲ مقدار بازده و ریسک برای ضرایب مختلف ریسک مربوط به داده‌های تاریخی مارکویتز

تنوع بخشی	$l_2 = ۰/۰۶,\ l_4 = ۰/۰۶۵,\ l_6 = ۰/۰۵,\ u_3 = ۰/۲,\ u_6 = ۰/۳۵$			
	مدل ۱		مدل ۲	
ضرایب ریسک (λ)	بازده ($\bar{E}(\tilde{R})$)	ریسک ($K1(x)$)	بازده ($\bar{E}(\tilde{R})$)	ریسک ($K1(x)$)
۰	۰/۱۷	۰/۵۲	۰/۱۵۷	۰/۵۴۹
۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۵۲	۰/۱۵۳	۰/۵۰۲
۰/۲۵	۰/۱۴۲	۰/۴۰۲	۰/۱۴۲	۰/۴۰۲
۰/۵	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳
۰/۷۵	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳
۱	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳	۰/۱۱۵	۰/۳۱۳
۱/۲۵	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴
۱/۵	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴
۲	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴	۰/۰۵۸	۰/۲۶۴
متوسط	۰/۱۱۱	۰/۳۵۳	۰/۱۰۸	۰/۳۵۴

نتایج دو مدل مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب ریسک مقدار ریسک نامطلوب و متوسط بازدهی کاهش می‌یابد. سبد سهامی که با استفاده از حل مدل ۱ بدست آمده است برای ضرایب ریسک کمتر از ۰/۲۵ دارای ریسک کمتر و بازدهی بالاتری در مقایسه با مدل ۲ است؛ در واقع، سطح کارایی مدل ۱ از مدل ۲ بهتر است. برای ضرایب ریسک بالاتر از ۰/۲۵ نتایج این دو مدل با یکدیگر یکسان است.

حال فرض کنید حدهای مشابهی بر روی نسبت‌های سرمایه‌گذاری برای هر یک از دارایی‌ها در نظر بگیریم. استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاری تحت حدود فوقانی مختلف با حدود تحتانی صفر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بازده و ریسک سبدهای سهام جایگزین برای مقادیر مختلف ضرایب ریسک در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳ مقدار بازده و ریسک برای مجموعه مختلف حدود فوقانی مربوط به داده‌های مارکویتز

تنوع بخشی	$u_j = ۰/۲$				$u_j = ۰/۱۵$			
ضرایب ریسک	مدل ۱		مدل ۲		مدل ۱		مدل ۲	
(λ)	$\bar{E}(\tilde{R})$	$K1(x)$	$\bar{E}(\tilde{R})$	$K1(x)$	$\bar{E}(\tilde{R})$	$K1(x)$	$\bar{E}(\tilde{R})$	$K1(x)$
۰	۰/۱۶۵	۰/۵۵۲	۰/۱۶۵	۰/۵۵۱	۰/۱۴۷	۰/۴۹۷	۰/۱۴۷	۰/۴۷۸
۰/۱۵	۰/۱۵۷	۰/۴۷۱	۰/۱۵۳	۰/۵۰۱	۰/۱۴۷	۰/۴۷۸	۰/۱۴۷	۰/۴۷۸
۰/۲۵	۰/۱۵۷	۰/۴۷۱	۰/۱۴۲	۰/۴۰۲	۰/۱۴۱	۰/۴۵۵	۰/۱۴۷	۰/۴۷۸
۰/۵	۰/۱۳۸	۰/۴۱۶	۰/۱۳۱	۰/۴۰۸	۰/۱۳۱	۰/۴۲۸	۰/۱۴۱	۰/۴۵۵
۰/۷۵	۰/۱۳۸	۰/۳۸۳	۰/۱۳۱	۰/۴۰۸	۰/۱۲۹	۰/۴۲۴	۰/۱۳۱	۰/۴۲۸
۱	۰/۰۸۱	۰/۳۵۵	۰/۱۳۱	۰/۴۰۸	۰/۱۰۶	۰/۳۹۹	۰/۱۳۱	۰/۴۲۸
۱/۲۵	۰/۰۸۱	۰/۳۵۵	۰/۱۳۱	۰/۴۰۸	۰/۱۰۳	۰/۳۹۶	۰/۱۱۱	۰/۴۰۵
۱/۵	۰/۰۸۱	۰/۳۵۵	۰/۱۳۱	۰/۴۰۸	۰/۱۰۳	۰/۳۹۶	۰/۱۱۱	۰/۴۰۵
۲	۰/۰۸۱	۰/۳۵۵	۰/۰۸۱	۰/۳۵۵	۰/۱۰۰	۰/۳۹۴	۰/۱۰۳	۰/۳۹۶
متوسط	۰/۱۲۰	۰/۴۱۳	۰/۱۳۳	۰/۴۳۰	۰/۱۲۳	۰/۴۳۰	۰/۱۳۰	۰/۴۳۹

مشاهده می‌شود که شروط تنوع بخشی بیشتر به صورت محدودیت (کران‌های فوقانی کوچک)، سبد سهام پر ریسک‌تری با سطح بازده بالاتری را در هر یک از مدل‌های ۱ و ۲ به همراه دارد. همچنین مدل ۲ در ازای بازدهی بالاتر دارای ریسک بیشتری از مدل ۱ است.

برای بررسی اعتبارسنجی این نتایج با استفاده از داده‌های مربوط به بازدهی سهام ۷۰ شرکت بورس اوراق بهادار تهران در سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵، این دو مدل مورد تحلیل و مقایسه قرار می‌دهیم. برای مقایسه مقدار ریسک بدست آمده از هر یک از این مدل‌ها، مسئله برای مقادیر مختلف بازدهی (۰ تا ۱۸ درصد) تحت حدود فوقانی مختلف حل می‌شود. نتایج در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴ مقدار ریسک برای مجموعه مختلف حدود فوقانی بازدهی مربوط به داده‌های بورس تهران

	مقادیر ریسک مدل ۱			مقادیر ریسک مدل ۲		
بازدهی	$u_j = ۰/۰۵$	$u_j = ۰/۱$	$u_j = ۰/۲$	$u_j = ۰/۰۵$	$u_j = ۰/۱$	$u_j = ۰/۲$
۰/۰	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴
۰/۰۳	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴
۰/۰۶	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴	۰/۲۹۳	۰/۲۵۹	۰/۲۴۴

۰/۰۹	۰/۳۳۴	۰/۳۳۴	۰/۳۳۴	۰/۳۴۲	۰/۳۴۲	۰/۳۴۲
۰/۱۲	۰/۴۴۶	۰/۴۴۶	۰/۴۴۶	۰/۴۵۶	۰/۴۵۶	۰/۴۵۶
۰/۱۵	۰/۵۵۷	۰/۵۵۷	۰/۵۵۷	۰/۵۷۰	۰/۵۷۰	۰/۵۷۰
۰/۱۸	infeasible	۰/۶۶۸	۰/۶۶۸	infeasible	۰/۶۸۴	۰/۶۸۴
متوسط ریسک	۰/۳۶۹	۰/۳۹۷	۰/۳۹۱	۰/۳۷۴	۰/۴۰۴	۰/۳۹۸
حد بازدهی مدل‌ها	۰/۱۷۹	۰/۱۸۵	۰/۱۸۸	۰/۱۷۵	۰/۱۸	۰/۱۸۳

نتایج حل مدل نشان می‌دهد که با حد فوقانی ۰/۰۵ برای نسبت هر سهم در سبد سرمایه-گذاری، متوسط ریسک سبد سهام هر دو مدل به کمترین مقدار می‌رسد. در حقیقت، با اعمال تنوع بخشی بیشتر در سبد سهام، ریسک آن کاهش می‌یابد. متوسط ریسک مدل ۲ برای حد فوقانی ۰/۱ نیز دارای بیشترین مقدار است. مقدار ریسک برای مقادیر مختلف بازدهی نیز قابل بررسی است؛ برای مثال، برای مقدار بازدهی ۰/۱۲ و ۰/۱۵، مدل ۱ به ترتیب دارای ریسک کمتر و بیشتری در مقایسه با با مدل ۲ است. همچنین متوسط ریسک مدل ۱ برای تمامی حدود نسبت‌های سرمایه گذاری از مدل ۲ بیشتر است که نشاندهنده برتری این مدل است.

حد بازدهی مدل‌های فوق، نشان می‌دهد که تنوع بخشی بیشتر به سبد سهام با در نظر گرفتن حد بالای کوچکتر که منجر به کاهش فضای شدنی مسئله می‌شود، باعث کاهش حد بازدهی شده است. همچنین حد بالای بازدهی مدل ۱ برای تمامی حدود نسبت‌های سرمایه گذاری، از مدل ۲ بیشتر است.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

چالش اصلی در مدلسازی ریاضی مسئله انتخاب سبد سهام به عنوان یکی از مسائل جذاب در زمینه مدیریت سرمایه‌گذاری، کنترل بازده و ریسک سبد سهام در فضای عدم اطمینان حاکم بر آن هستند. در مدل پیشنهادی، در مورد استراتژی بهینه سرمایه‌گذاری برای تشکیل سبد سهام مناسب با در نظر گرفتن توازن بین حداکثرسازی بازدهی و حداقل‌سازی ریسک سرمایه‌گذاری با توجه به بازده فازی تصمیم‌گیری می‌شود. نتایج حل مدل نشان می‌دهد حد بالای بازدهی و متوسط ریسک مدل ۱ برای تمامی حدود نسبت‌های سرمایه‌گذاری از مدل ۲ بیشتر است که نشان‌دهنده برتری این مدل است. این مدل قادر است با انتخاب مقدار مناسب برای نسبت هر

سهم و ضریب ریسک، سبد سهام مناسب را به سرمایه‌گذاران ارائه دهد به نحوی که بازده و ریسک همزمان بهینه شوند. نتایج نشان می‌دهد که شروط تنوع بخشی بیشتر به صورت محدودیت، ممکن است سبد سهام پر ریسک‌تری با سطح بازده بالاتری را به همراه دارد. با این حال با توجه به اینکه قرار دادن حد بالای خیلی کوچک برای نسبت سرمایه‌گذاری در هر سهم جهت تنوع بخشی بیشتر به سبد سهام می‌تواند باعث محدود شدن انتخاب سرمایه‌گذار و در نتیجه کاهش بازدهی و افزایش ریسک شود، سرمایه‌گذاران باید در انتخاب این حدود دقت کنند.

در تحقیقات آتی می‌توان مدل پیشنهادی را برای مدل‌های بزرگتر و چند دوره‌ای سبد سهام مورد استفاده و بررسی قرار داد. با توجه به وجود تحقیقات کم در حوزه برنامه‌ریزی فازی در این زمینه، می‌توان از دیگر رویکردهای برنامه‌ریزی فازی برای برنامه‌ریزی ریاضی سبد سهام استفاده کرد. همچنین رویکرد برنامه‌ریزی استوار از دیگر روش‌هایی بهینه‌سازی بازده و ریسک است که می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

۶- پی نوشت

١. Downside risk
٢. Markowitz
٣. Cardinality constraints
٤. Threshold constraints
٥. Flexible programming
٦. Possibilistic programming
٧. Konno & Yamazaki
٨. Speranza
٩. Eeinstein
١٠. Yan
١١. Pınar
١٢. Liu
١٣. Zhang
١٤. Watada
١٥. León
١٦. Tanaka & Guo
١٧. Inuiguchi & Tanino
١٨. Regret
١٩. Wang & Zhu
٢٠. Giove
٢١. Ida
٢٢. Carlsson
٢٣. Wang
٢٤. Lacagnina & Pecorella
٢٥. Dubois & Prade
٢٦. Carlsson and Fullér

۷- منابع

[1] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, *7*(1), 77-91.

[2] Goodarzi, M., Yakideh, k., & Mahfoozi, G. (2016). Portfolio Optimization by Combining Data Envelopment Analysis and Decision-Making Hurwicz Method,

Modern Research in Decision Making, 1(4), 143-165.

[3] Speranza, M. G. (1993). *Linear programming models for portfolio optimization*.

[4] Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, *37*(5), 519-531.

[5] Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, *36*(3), 5058-5063.

[6] Sun, X., Zheng, X., & Li, D. (2013). Recent advances in mathematical programming with semi-continuous variables and cardinality constraint. *Journal of the Operations Research Society of China*, *1*(1), 55-77.

[7] Shaw, D. X., Liu, S., & Kopman, L. (2008). Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization. *Optimisation Methods & Software*, ۲۳(۳), ۴۱۱-۴۲۰.

[8] Lacagnina, V., & Pecorella, A. (2006). A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem. *Fuzzy sets and systems*, *157*(10), 1317-1۳۲۷.

[9] Huang, C. (2002). An application of calculated fuzzy risk. *Information Sciences*, ۱۴۲(۱), ۳۷-۵۶.

[10] Farrokh, M., Azar, A., Jandaghi, G., & Ahmadi, E. (2018). A novel robust fuzzy stochastic programming for closed loop supply chain network design under hybrid uncertainty. Fuzzy Sets and Systems, 341, 69-9۱.

[11] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.

[12] León, T., Liern, V., & Vercher, E. (2002). Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach. *European Journal of Operational*

Research, *139*(1), 178-189.

[13] Mehlawat, M. K. (2016). Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels. *Information Sciences*, *345*, ۹-۲۶.

[14] Eeinstein, T. (1993). Note: A reformation of a Mean-Absolute deviation portfolio optimization. *Management Science*, *39*(12), 1552-1553.

[15] Yan, W., Miao, R., & Li, S. (2007). Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution. *Applied Mathematics and Computation*, ۱۹۴(۱), ۱۲۸-۱۳۴.

[16] Pınar, M. Ç. (2007). Robust scenario optimization based on downside-risk measure for multi-period portfolio selection. *OR Spectrum*, *29*(2), 295-309.

[17] Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, P. (2013). A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis. *Economic Modelling*, *33*, 113-1۱۹.

[18] Zhang, P., & Zhang, W. G. (2014). Multiperiod mean absolute deviation fuzzy portfolio selection model with risk control and cardinality constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, *255*, 74-91.

[19] Watada, J. (1997). Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making. *Tatra Mountains Mathematical Publication*, *13*(4), 219-248.

[20] Tanaka, H., & Guo, P. (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *European Journal of operational research*, ۱۱۴(۱), ۱۱۵-۱۲۶.

[21] Inuiguchi, M., & Tanino, T. (2000). Portfolio selection under independent possibilistic information. *Fuzzy sets and systems*, *115*(1), 83-92.

[22] Farrokh, M., Azar, A., & Jandaghi, G. (2016). A novel robust fuzzy programming approach for closed loop supply chain design. *Modern Research in Decision-making*, *1*(3), 131-160.

[23] Wang, S., & Zhu, S. (2002). On fuzzy portfolio selection problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *1*(4), 361-377.

[24] Giove, S., Funari, S., & Nardelli, C. (2006). An interval portfolio selection problem based on regret function. *European Journal of Operational Research*, ۱۷۰(۱), ۲۵۳-۲۶۴.

[25] Ida, M. (2004). Solutions for the portfolio selection problem with interval and fuzzy coefficients. *Reliable Computing*, *10*(5), 389-400.

[26] Carlsson, C., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy sets and systems*, *131*(1), 13-۲۱.

[27] Wang, X., Xu, W., Zhang, W., & Hu, M. (2005). Weighted possibilistic variance of fuzzy number and its application in portfolio theory. *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 477-477.

[28] Lacagnina, V., & Pecorella, A. (2006). A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem. *Fuzzy sets and systems*, *157*(10), 1317-1۳۲۷.

Carlsson, C., & Fullér, R. (2001). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, *122*(2), 315-326.

[29] Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, *1*(1), 3-28.

[30] Dubois, D., & Prade, H. (1987). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and systems*, *24*(3), 279-300.