



پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری

دوره ۶، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صص ۷۶-۱۰۰

نوع مقاله: پژوهشی

یک روش تسریع یافته برای مسئله برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های معادلات رابطه فازی دو قطبی با عملگر ماکزیمم-ضرب

سمانه علیان نژادی^۱، علی عباسی ملایی^{۲*}

۱- فارغ‌التحصیل دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

۲- دانشیار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۱۹

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۳

چکیده

در این مقاله، مسئله مینیمم‌سازی یک تابع هدف هندسی با توان تک جمله‌ای با محدودیت‌های معادلات رابطه فازی دو قطبی با عملگر ترکیبی ماکزیمم-ضرب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این مقاله قصد دارد که با ساده‌سازی مسئله، کران پایین تابع هدف آن را بهنگام کند و الگوریتمی برای یافتن کران بالای ابتدایی برای مقدار هدف بهینه مسئله بر اساس کران پایین ابتدایی (یا بهنگام شده) آن طراحی کند. سپس، یک روش شاخه و کران اصلاح شده بر اساس این کران برای حل مسئله فوق توسعه می‌دهیم. یک الگوریتم کارا برای حل مسئله با توجه به الگوریتم فوق و روش شاخه و کران توسعه یافته طراحی خواهیم کرد. با توجه به کران بالا و پایین پیشنهاد شده، روش شاخه و کران توسعه یافته تعداد گره‌های خیلی کمتری را برای پیدا کردن جواب بهینه بررسی می‌کند. از این رو، میزان محاسبات به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. در پایان، یک مثال عددی برای توضیح الگوریتم و کارایی آن ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: معادلات رابطه فازی دو قطبی، برنامه‌ریزی هندسی، عملگر ماکزیمم-ضرب، روش شاخه و کران اصلاح شده.



۱- مقدمه

برنامه‌ریزی هندسی در ابتدا توسط دیوفین و همکارانش^۱ در سال ۱۹۶۷ معرفی شد [۱]. سپس زنگر^۲ [۲] و تعدادی از محققان [۳] موضوعاتی از قبیل تحلیل حساسیت، برآزش مونیومالی^۳، و توسعه‌های زیادی مانند توان‌های کسری، نماهای چندجمله‌ای، و محدودیت‌های تساوی پوزی نومیال^۴ را مورد بحث قرار دادند. مسائل برنامه‌ریزی هندسی به‌طور خیلی نزدیکی از طریق دوگانگی به مسائل آنتروپی^۵ و آنتروپی متقاطع^۶ مرتبط می‌باشد [۴]. برای مثال، دانتزیک و همکارانش^۷ [۵] یک مسئله تعادل شیمیایی را مورد مطالعه قرار دادند که به‌صورت دوگان مسئله برنامه‌ریزی هندسی است. یک مروری از روند توسعه برنامه‌ریزی هندسی را می‌توان در [۶] یافت. تحلیل حساسیت برنامه‌ریزی هندسی در منبع [۷] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. پژوهشگران زیادی روی جنبه‌های مختلف برنامه‌ریزی هندسی کار کرده‌اند. به‌عنوان نمونه، تعدادی از محققان تحقیقاتی روی برنامه‌ریزی هندسی عدد صحیح مختلط انجام داده‌اند [۸]. برنامه‌ریزی هندسی استوار^۸ که در آن ضرایب در پوزی نومیال‌ها قطعی نیستند در منبع [۹] مطالعه شده‌اند. به‌دلیل وجود عدم قطعیت در تعیین پارامترهای مسائل دنیای واقعی، بلمن و زاده^۹ مسئله تصمیم‌گیری در یک محیط فازی و علوم مدیریت [۱۰] مورد بررسی قرار دادند. منطق فازی ابزار قدرتمندی برای فرمول‌بندی مسئله طراحی در بهینه‌سازی می‌باشد [۱۱-۱۴].

مسائل بهینه‌سازی هندسی با محدودیت‌هایی از جنس معادلات یا نامعادلات رابطه فازی کاربردهای مهمی در ارتباط بی‌سیم [۱۵]، سیستم‌های به اشتراک‌گذاری فایل در شبکه‌های هم‌تا به هم‌تا^{۱۰} با پروتکل‌های بیت تورنت^{۱۱} [۱۶]، و مباحث مخابراتی دارد. مسئله برنامه‌ریزی

هندسی با تابع هدف $Z = \bigvee_{j=1}^n (c_j \wedge x_j)$ با محدودیت‌های نامعادلات رابطه فازی^{۱۲} (FRIs)

توسط ونگ و همکارانش^{۱۳} [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفت که در آن دو نماد "∨" و "∧" به‌ترتیب عملگر ماکزیمم و مینیمم را نمایش می‌دهد. با بکارگیری مسیرهایی براساس ماتریس مشخصه، مسئله را حل کردند. یانگ و همکارانش^{۱۴} [۱۵] مسئله برنامه‌ریزی هندسی با تابع

هدف $Z = \bigvee_{i=1}^n x_i$ و محدودیت‌های نامعادلات رابطه فازی با عملگر ماکزیمم-ضرب را برای

مدل مدیریت بهینه‌سازی ایستگاه‌های پایه انتشار ارتباط بی‌سیم معرفی کردند و یک روش



ماتریسی برای حل مسئله اخیر، بدون محاسبه همه جواب‌های (شبه) مینیمال محدودیت‌های مسئله ارائه کردند. وو [۱۸] مسئله برنامه‌ریزی با تابع هدف $Z = \bigvee_{i=1}^m (c_i \wedge x_i^{r_i})$ ، که در آن $c_i \geq 0$ ، و محدودیت‌های معادلات رابطه فازی^{۱۶} (FRES) با عملگر ماکزیم-مینیم را مورد مطالعه قرار دادند. ژو و همکارانش^{۱۷} [۱۹] تعدادی الگوریتم برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های بهینه مسئله فوق در سه حالت ارائه کردند. مسئله برنامه‌ریزی هندسی رابطه فازی نیمه مشبک^{۱۸} با عملگر ماکزیم-ضرب و ماکزیم-مینیم در منابع [۲۰-۲۱] معرفی گردید و یک روش ماتریسی برای حل مسئله با عملگر ماکزیم-ضرب طراحی شد و مسئله با عملگر ماکزیم-مینیم در دو حالت ماکزیم‌سازی و مینیم‌سازی مورد مطالعه قرار گرفت. سیستم معادلات و نامعادلات روابط فازی مسایل مذکور نسبت به متغیرها صعودی هستند. در برخی از کاربردهای اقتصادی [۲۲] که نیازمند داوری و قضاوت بشری هستیم با سیستم‌هایی از جنس معادلات رابطه فازی مواجه می‌شویم که شامل بردار متغیرهای تصمیم و نقیض آن به‌طور همزمان هستند. چنین سیستم‌هایی را معادلات رابطه فازی دو قطبی^{۱۹} (BFRES) می‌نامند. مسئله بهینه‌سازی با محدودیت‌های BFRES برای اولین بار توسط فرسن و همکارانش^{۲۰} [۲۲] برای فرمول‌بندی یک مسئله اقتصادی معرفی شد. آن‌ها سیستم BFRES را به‌طور معادل به چند سیستم FRES و FRI تبدیل کردند. مجموعه جواب آن را با اشتراک و اجتماع گرفتن از مجموعه جواب‌های FRES و FRI به دست آوردند و یک الگوریتم گام‌به‌گام برای پیدا کردن جواب بهینه مسئله فوق با توجه به ساختار مجموعه جواب سیستم BFRES ارائه کردند. با توجه به اینکه یافتن مجموعه جواب‌های سیستم معادلات و نامعادلات رابطه فازی یک مسئله NP-سخت^{۲۱} است، لذا یافتن مجموعه جواب سیستم BFRES نیز NP-سخت می‌باشد. از این رو، پیاده‌سازی الگوریتم فوق بسیار زمان‌بر خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل، لی و لیو^{۲۲} [۲۳] از نتایج حاصل از منبع [۲۴] استفاده کردند و مسئله بهینه‌سازی فوق را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح صفر-یک تبدیل کردند. تعدادی از محققان روش آن‌ها را با توجه به خواص جواب بهینه و رویه‌های ساده‌سازی بهبود دادند [۲۵]. با توجه به اهمیت و کاربرد مسائل برنامه‌ریزی هندسی، علیان نژادی و همکارانش [۲۶] بهینه‌سازی تابع هدف هندسی مونومیال با محدودیت‌های BFRES و عملگر ماکزیم-ضرب را مورد مطالعه قرار دادند. یک الگوریتم برای دستیابی به جواب بهینه مسئله براساس ساختار دامنه شدنی و تابع هدف طراحی شد. مسئله زیر به‌عنوان تعمیمی از مدل‌های مندرج در



$$(۱) \quad \text{Min } Z(x) = \sum_{j=1}^n (c_j \cdot x_j^{r_j}),$$

$$\text{s.t. } A^+ \circ x \vee A^- \circ x = b, \quad (۲)$$

$$x \in [0, 1]^n. \quad (۳)$$

که در آن $A^+ = [a_{ij}^+]_{m \times n}$ ، $A^- = [a_{ij}^-]_{m \times n}$ ، $b = [b_i]_{m \times 1}$ ، و مؤلفه‌های آن‌ها متعلق به $[0, 1]$ هستند. همچنین، $c = [c_j]_{1 \times n}$ و $r = [r_j]_{1 \times n}$ با $c_j \geq 0$ و $r_j \geq 0$ برای $j \in J = \{1, \dots, n\}$ است. نمادهای \vee ، \circ ، و \neg به ترتیب نماینده عملگر ماکزیمم، ترکیب ماکزیمم-ضرب، و عملگر نفی بردار $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ به صورت $\neg x = (1 - x_1, \dots, 1 - x_n)^T$ است. در [۲۸] تعدادی شرایط کافی برای تعیین یکی از جواب‌های بهینه مسئله بدون حل آن ارائه شد. در صورتی که مسئله (۱)-(۳) در شرایط کافی مندرج در [۲۸] صادق نباشد، یک روش شاخه و کران اصلاح شده برای تعیین جواب بهینه مسئله (۱)-(۳) در حالت کلی پیشنهاد گردید. در [۲۹]، نوع دیگری از شرایط کافی برای تعیین تعدادی از مؤلفه‌های بهینه مسئله بدون حل مستقیم آن پیشنهاد گردید. با توجه به این شرایط، ساختار دامنه شدنی مسئله تقلیل داده می‌شود و دامنه جستجوی سایر مؤلفه‌های بهینه محدودتر می‌شود و برای ردیابی آن‌ها در [۲۹] از روش شاخه و کران اصلاح شده استفاده می‌شود و حجم محاسبات تقلیل می‌یابد. اکنون، سؤال مهمی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که چه تغییراتی می‌توان در قسمت شاخه و کران داد که تعداد ارزیابی‌های آن به‌طور قابل ملاحظه‌ای تقلیل یابد که در این مقاله، سعی می‌کنیم با پاسخ به موارد زیر، تعداد ارزیابی‌های روش شاخه و کران اصلاح شده را تقلیل دهیم:

۱. چگونه می‌توانیم با ساده‌سازی مسئله، یک کران پایین بهنگام شده برای تابع هدف بهینه مسئله (۱)-(۳) به دست آورد؟
۲. چگونه می‌توانیم الگوریتمی طراحی کنیم که یک کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله (۱)-(۳) یا مسئله ساده‌سازی شده آن تولید کند؟ و نحوه به‌کارگیری این کران در روش شاخه و کران برای کاهش تعداد ارزیابی‌های روش شاخه و کران



اصلاح شده چگونه است؟

پاسخ به سؤالات فوق، انگیزه‌های اصلی این مقاله است. در این مقاله، موارد فوق را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و یک کران پایین ابتدایی برای مقدار تابع هدف مسئله تعیین می‌گردد و الگوریتمی برای پیدا کردن کران بالای ابتدایی مقدار تابع هدف بهینه مسئله براساس کران پایین ابتدایی (یا بهنگام شده) طراحی می‌شود. روش شاخه و کران اصلاح شده در [۲۹-۲۸] با توجه به کران بالای پیشنهادی و کران پایین، تعداد گره‌های کمتری را برای یافتن جواب بهینه مسئله بررسی خواهد کرد و میزان محاسبات را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. در پایان، مثالی برای توضیح کارایی الگوریتم ارائه می‌شود. ساختار این مقاله به‌صورت زیر است. در بخش دوم، ویژگی‌های دامنه شدنی مسئله بررسی می‌شود. در بخش سوم، یک کران پایین برای مقدار تابع هدف بهینه مسئله ارائه می‌شود. در بخش چهارم، الگوریتمی برای محاسبه کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله ارائه خواهد شد. در بخش پنجم، الگوریتمی برای حل مسئله اصلی طراحی خواهد شد. این الگوریتم به‌وسیله یک مثال عددی در بخش ششم توضیح داده می‌شود. نتایج حاصله در بخش هفتم ارائه می‌شود.

۲- ویژگی‌های دامنه شدنی مسئله (۱)-(۳)

قسمت محدودیت‌های مسئله (۱)-(۳) عبارت است از مجموعه بردارهای جواب $x \in [0,1]^n$ است به‌طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{Maxmax}_{j \in J} \{a_{ij}^+ \cdot x_j, a_{ij}^- \cdot (1 - x_j)\} = b_i, \quad \forall i \in I = \{1, \dots, m\}. \quad (4)$$

سیستم معادلات رابطه فازی دو قطبی با عملگر ماکزیمم-ضرب (۴) سازگار است اگر مجموعه جواب آن یعنی $S(A^+, A^-, b)$ ناتهی باشد. در غیر این صورت، سیستم (۴) ناسازگار است. کران‌های بالا و پایین مجموعه جواب سیستم (۴) در لم ۱ معرفی می‌شود.

لم ۱ [۲۸]. بردار $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ کران پایین مجموعه جواب سیستم (۴) می‌باشد که در آن

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \text{ بردار } \bar{x}_j = \text{Max}_{i \in I} \left\{ 1 - \frac{b_i}{a_{ij}^-} \mid a_{ij}^- > b_i \right\}$$



کران بالای مجموعه جواب سیستم (۴) می‌باشد که در آن $\left\{ \frac{b_i}{a_{ij}^+} \mid a_{ij}^+ > b_i \right\}$ برای $\hat{x}_j = \min_{i \in I} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}^+} \mid a_{ij}^+ > b_i \right\}$ هر $j \in J$ است.

با توجه به [۲۸]، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که $\bar{x}_j < \hat{x}_j$ برای هر $j \in J$ و $b_i > 0$ برای هر $i \in I$ است. در ادامه، ماتریس مشخصه^{۲۳} $\tilde{Q} = [\tilde{q}_{ij}]_{m \times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۸]:

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} \{\bar{x}_j\} & a_{ij}^-(1 - \bar{x}_j) = b_i \neq a_{ij}^+ \hat{x}_j, \\ \{\hat{x}_j\} & a_{ij}^-(1 - \bar{x}_j) \neq b_i = a_{ij}^+ \hat{x}_j, \\ \{\bar{x}_j, \hat{x}_j\} & a_{ij}^-(1 - \bar{x}_j) = b_i = a_{ij}^+ \hat{x}_j, \\ \emptyset & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J.$$

با توجه به لم ۱، ماتریس \tilde{Q} تمامی اطلاعات مورد نیاز برای برقراری سیستم (۴) را ثبت می‌کند و از این رو، به ماتریس مشخصه سیستم (۴) معروف است. برای سادگی، از روی ماتریس \tilde{Q} ، دو ماتریس مشخصه دودویی $Q^+ = [q_{ij}^+]_{m \times n}$ و $Q^- = [q_{ij}^-]_{m \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$(5) q_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \hat{x}_j \in \tilde{q}_{ij}, \\ \text{Otherwise,} & \end{cases} \quad \text{و} \quad q_{ij}^- = \begin{cases} 1 & \bar{x}_j \in \tilde{q}_{ij}, \\ \text{Otherwise,} & \end{cases} \quad \forall i \in I, j \in J.$$

با توجه به ماتریس Q^+ ، مجموعه‌های اندیس زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$J_i^+(x) = \{j \in J \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ q_{ij}^+ = 1\} \quad \text{و} \quad I_j^+(x) = \{i \in I \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ q_{ij}^+ = 1\}$$

همچنین، با توجه به ماتریس Q^- ، مجموعه‌های اندیس زیر را تعریف کنید:

$$J_i^-(x) = \{j \in J \mid x_j = \bar{x}_j \ \& \ q_{ij}^- = 1\} \quad \text{و} \quad I_j^-(x) = \{i \in I \mid x_j = \bar{x}_j \ \& \ q_{ij}^- = 1\}$$

که در آن‌ها $i \in I$ و $j \in J$ می‌باشد. به علاوه، برای هر $j \in J$ تعریف می‌کنیم:

$$I_j(x) = I_j^+(x) \cup I_j^-(x)$$

براساس نمادهای فوق، مجموعه‌های اندیس زیر تعریف می‌شود:



$$(۶) I_j^+ = I_j^+(\hat{x}), J_i^+ = J_i^+(\hat{x}), I_j^- = I_j^-(\bar{x}), J_i^- = J_i^-(\bar{x}), \quad \forall i \in I, j \in J.$$

اکنون، شرایط لازم و کافی برای چک کردن سازگاری سیستم (۴) بیان می‌شود. قبل از آن، لازم است مفهوم زیر را معرفی کنیم. برای هر $j \in J$ ، مقدار \hat{x}_j را با لیترال مثبت y_j و مقدار \bar{x}_j با لیترال منفی $\neg y_j$ برچسب‌گذاری می‌کنیم که عبارت اخیر بدین معنی است که $x_j = \hat{x}_j$ و $x_j = \bar{x}_j$ عبارات $y_j = 1$ و $y_j = 0$ را ایجاب می‌کند و برعکس.

قضیه ۱ [۲۸]. سیستم معادلات رابطه فازی دوقطبی با عملگر ماکزیم-ضرب سازگار است اگر و تنها اگر فرمول بولی مشخصه $C = \bigwedge_{i \in I} C_i$ خوش‌تعریف و رضایت‌بخش باشد که در

$$C_i = \bigvee_{j \in J_i^+} y_j \vee \bigvee_{j \in J_i^-} \neg y_j \quad \text{و} \quad \{0, 1\} \in \{y_j, \neg y_j\}.$$

نکته ۱. اگر مقدار \bar{x}_k برای مؤلفه k ام جواب بهینه x^* انتخاب شود، در این صورت سطر(های) $i \in I_k^-$ و ستون k می‌تواند از ماتریس‌های Q^+ و Q^- حذف شود. همچنین، اگر مقدار \hat{x}_k برای k امین مؤلفه جواب بهینه x^* انتخاب شود، در این صورت سطر(های) $i \in I_k^+$ و ستون k می‌تواند از ماتریس‌های Q^+ و Q^- حذف شوند. در بخش بعد، یک کران پایین آغازین برای تابع هدف بهینه مسئله (۳)-(۱) ارائه می‌شود و در صورت برقراری شرایط کافی می‌توان آن را با یک کران پایین بهتری بهنگام کرد.

۳- محاسبه یک کران پایین برای مقدار تابع هدف بهینه مسئله (۱)-(۳)

چون $c \geq 0$ ، $r \geq 0$ و $\bar{x} \leq x$ برای هر $x \in S(A^+, A^-, b)$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$(۷) \forall x \in S(A^+, A^-, b): Z(x) \geq L,$$

که در آن $L = \bigvee_{j \in J} (c_j \bar{x}_j^r)$ [۲۸]. بنابراین، L یک کران پایین آغازین روی مقدار هدف مسئله (۱)-(۳) است. یکی از ویژگی‌هایی که می‌تواند کران پایین مذکور را بهبود دهد، در قضیه و نکته زیر بیان می‌شود.

قضیه ۲ [۲۹]. اگر اندیس $i \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $|J_i^+| + |J_i^-| = 1$ یعنی



$J_i^+ = \{k\}$ و $J_i^- = \emptyset$ یا $J_i^- = \{k\}$ و $J_i^+ = \emptyset$ ، در این صورت برای هر جواب بهینه $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ داریم: $x_k^* = \hat{x}_k$ (یا $x_k^* = \bar{x}_k$).

نکته ۲. اگر مقدار \hat{x}_k برای k امین مؤلفه جواب بهینه x^* تحت شرایط قضیه ۲ انتخاب شود، در این صورت کران پایین ابتدایی L می‌تواند با یک مقدار بزرگتر بهنگام‌سازی شود. بنابراین، در این حالت، $L = \text{Max}\{L, c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}\}$ قرار می‌دهیم. این مطلب واضح است که $L \geq \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot \bar{x}_j^{r_j})$

قضیه ۳. اگر L به وسیله مقدار $\text{Max}\{L, c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}\}$ بهبود داده شود، مقدار بهنگام شده L کران پایینی روی مقدار هدف مسئله (۱)-(۳) باقی می‌ماند.

اثبات. با توجه به نکته ۱، وقتی که \hat{x}_k برای k امین مؤلفه جواب بهینه x^* انتخاب می‌شود، مقدار L به وسیله $\text{Max}\{L, c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}\}$ بهبود داده می‌شود. برای سادگی، مقدار بهبود داده شده L با L' در سراسر این اثبات نمایش داده می‌شود، یعنی، $L' = \text{Max}\{L, c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}\}$. اگر $L \geq c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}$ باشد، در این صورت $L' = L$ و نتیجه با توجه به رابطه (۷) درست است. در غیر این صورت، داریم $L < c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}$ و $L' = c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k}$. بنابراین، داریم: $Z(x^*) \geq c_k \cdot \hat{x}_k^{r_k} = L'$. از طرف دیگر، چون x^* یک جواب بهینه است، در این صورت برای هر $x \in S(A^+, A^-, b)$ داریم: $Z(x) \geq Z(x^*)$. از این رو، در این حالت نتیجه حاصل می‌شود یعنی برای هر $x \in S(A^+, A^-, b)$ داریم: $Z(x) \geq L'$.

نکته ۳. اگر تحت شرایط کافی معینی، تعدادی از مؤلفه‌های یک جواب بهینه x^* از مسئله (۱)-(۳) تعیین شوند، متغیرهای تعیین شده و محدودیت‌های متناظر با آن‌ها را از مسئله (۱)-(۳) جهت تقلیل ابعاد مسئله حذف کنید. قرار دهید: $J^* = \{j \in J \mid x_j^* \text{ مشخص شده است}\}$ ، $L^* = \bigvee_{j \in J^*} (c_j \cdot x_j^{*r_j})$ و همچنین مجموعه اندیس J را به صورت $J = J - J^*$ بهنگام‌سازی کنید. به وضوح، خواهیم داشت: $J \cup J^* = \{1, \dots, n\}$ و $J \cap J^* = \emptyset$. بدون



از دست دادن کلیت، فرض کنید که $\bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j})$ مقدار هدف مسئله تقلیل یافته است. توجه کنید که برای هر $x = (x_j)_{j \in J}$ داریم: $Z(x) = \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j}) \vee L^*$ که ضرورتاً با $\bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j})$ برابر نیست. وقتی که x یک جواب شدنی برای مسئله تقلیل یافته است، در این صورت واضح است که $\bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j}) \vee L = \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j}) \vee L^*$. اکنون در بخش بعدی، الگوریتمی برای محاسبه یک کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله (۱)–(۳) ارائه می‌دهیم.

۴- الگوریتمی برای محاسبه کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله (۱)–(۳)

در این بخش، یک کران بالای آغازین U روی مقدار هدف بهینه مسئله تقلیل یافته ارائه می‌دهیم. این کران بالای آغازین می‌تواند به وسیله یک جواب بهتر در فرآیند حل مسئله بهبود داده شود. این الگوریتم بر پایه کران پایین آغازین (یا بهنگام شده) L روی مقدار هدف مسئله (۱)–(۳) است. به وضوح، $U \vee L^* (= U \vee L)$ یک کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله (۱)–(۳) است. این کران بالای آغازین کمک می‌کند که مسئله سریع‌تر حل شود؛ زیرا گام‌های کمتری برای حل مسئله نیاز داریم. برای این هدف، الگوریتمی با دو رویه توسعه می‌دهیم. الگوریتم با یک جواب شدنی x شروع می‌شود. توجه کنید که اندازه مسئله (۱)–(۳) از قبل ممکن است به وسیله عملیات ساده‌سازی تقلیل داده شده باشد؛ یعنی ممکن است که $|J| < n$ باشد. سپس جواب شدنی x (در صورت امکان) برای دستیابی به جواب شدنی دیگر بدون افزایش مقدار هدف تغییر می‌دهیم. در این الگوریتم، ابتدا یک مجموعه اندیس $\bar{J} = \{j \in J \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ c_j \cdot x_j^{r_j} > L\}$ را تعیین می‌کنیم. واضح است که $\bar{J} = \emptyset$ اگر و تنها اگر $Z(x) = L$ (یا $\bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j}) \leq L$). بنابراین، نیازی به تغییر جواب شدنی x نداریم زیرا که برای هر $y \in S(A^+, A^-, b)$ داریم: $Z(y) \geq L = Z(x)$. یعنی بردار x یک



جواب بهینه برای مسئله تقلیل یافته است. اگر $\bar{J} \neq \emptyset$ ، در این صورت مقادیر \hat{x}_j^r برای c_j برای $j \in \bar{J}$ به ترتیب نزولی مرتب می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $V^* = \left\{ k \in \bar{J} \mid c_k \cdot \hat{x}_k^r = \max_{j \in \bar{J}} c_j \cdot \hat{x}_j^r \right\}$

برای کاهش مقدار هدف، x_j بایستی از مقدار \hat{x}_j به مقدار \bar{x}_j ، برای هر $j \in V^*$ ، (در صورت امکان) تقلیل داده شود. برای انجام این کار، دو مجموعه اندیس $J' = \left\{ j \in J \mid x_j = \bar{x}_j \ \& \ c_j \cdot \hat{x}_j^r \leq L \right\}$ و $J'' = \left\{ j \in J \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ c_j \cdot \hat{x}_j^r \leq L \right\}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین، اگر برای هر $j \in V^*$ ، مقدار \hat{x}_j بتواند به \bar{x}_j تقلیل داده شود، در این صورت سعی می‌کنیم که کاهش بیشتری را به مقدار هدف تحمیل کنیم. در غیر این صورت، برای کاهش مقدار هدف، ابتدا سعی می‌کنیم که مقدار x_j ، برای $j \in \bar{J} - V^*$ ، با توجه به ترتیب قبلی آن‌ها، کاهش دهیم. سپس بررسی می‌کنیم که آیا مقدار x_j ، برای $j \in V^*$ ، از \hat{x}_j می‌تواند به \bar{x}_j کاهش یابد یا خیر؟ براساس مطالب فوق، یک الگوریتمی به همراه رویه‌های آن ارائه می‌شود. اما قبل از آن، تعریف زیر را که در الگوریتم ۱ و رویه‌های آن موردنیاز خواهد بود، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید که $V := \left\{ v_j = c_j \cdot \hat{x}_j^r \mid j \in \bar{J} \right\}$ و $Max_{j \in \bar{J}} v_j = l$ در این

صورت، مجموعه اندیس زیر را تعریف می‌کنیم: $V^* = \left\{ j \in \bar{J} \mid v_j = l \right\}$

الگوریتم ۱: الگوریتمی برای محاسبه یک کران بالای آغازین روی مقدار هدف بهینه مسئله (۱)-(۳).

گام ۱. یک جواب شدنی x از ماتریسهای تقلیل یافته Q^+ و Q^- با بکارگیری فرمول بولی مشخصه $C = \bigwedge_{i \in I} C_i$ مندرج در قضیه ۱ پیدا کنید.

گام ۲. مجموعه اندیس $\bar{J} = \left\{ j \in J \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ c_j \cdot \hat{x}_j^r > L \right\}$ را تعیین کنید.

گام ۳. اگر $\bar{J} = \emptyset$ ، در این صورت به گام ۶ بروید. در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

گام ۴. دو مجموعه V و V^* را با بکارگیری تعریف ۱ محاسبه کنید. به "رویه ترتیب



نزولی (V, V^*) بروید.

گام ۵. به "رویه تغییر جواب شدنی (x, \bar{J}, \bar{V}) " بروید.

گام ۶. کران‌های بالای آغازین زیر را محاسبه کنید:

$$U = \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^r) \quad \text{و} \quad U' = U \vee L^* (= U \vee L)$$

که در آن U و U' کران‌های بالای آغازین به ترتیب روی مقدار هدف بهینه مسئله تقلیل یافته و مسئله (۱)–(۳) هستند.

گام ۷. پایان.

به علاوه، رویه‌های استفاده شده در الگوریتم ۱ در زیر ارائه می‌شوند.

رویه ترتیب نزولی (V, V^*) :

گام ۱. قرار دهید $k = 1$.

گام ۲. اگر $V = \emptyset$ ، در این صورت توقف کنید و مجموعه $\{s_k \mid k = 1, \dots, |\bar{J}|\}$ را

برگردانید.

گام ۳. اگر $|V^*| = 1$ ، در این صورت s_k از V^* انتخاب کنید و به گام ۵ بروید.

گام ۴. اگر $|V^*| > 1$ ، در این صورت $s_k = \text{Min}\{j \mid j \in V^*\}$ اختیار کنید.

گام ۵. قرار دهید $\bar{J} := \bar{J} - \{s_k\}$ و مجموعه‌های V و V^* را بهنگام کنید.

گام ۶. قرار دهید: $k := k + 1$.

گام ۷. به گام ۲ بروید.

رویه تغییر جواب شدنی (x, \bar{J}, \bar{V}) :

گام ۱. قرار دهید: $t = 0$.

گام ۲. قرار دهید: $k = 1$.

گام ۳. دو مجموعه اندیس زیر را به دست آورید:

$$J' = \left\{ j \in J \mid x_j = \bar{x}_j \ \& \ c_j \cdot \hat{x}_j^r \leq L \right\}$$



$$J'' = \left\{ j \in J \mid x_j = \hat{x}_j \ \& \ c_j \cdot \hat{x}_j^{r_j} \leq L \right\}$$

گام ۴. اگر $k+t > |\bar{J}|$ در این صورت توقف کنید و مقدار x را برگردانید.

گام ۵. فرآیندهای زیر را اجرا کنید:

گام ۵-۱. اگر $I_{S_k}^- \cup \left(\bigcup_{j \in J - \{S_k\}} I_j(x) \right) = I$ در این صورت قرار دهید:

$x_{S_k} = \bar{x}_{S_k}$ و به گام ۶ بروید.

گام ۵-۲. اگر $I_{S_k}^- \cup \left(\bigcup_{j \in J'} I_j^+(x) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J - (J' \cup \{S_k\})} I_j(x) \right) = I$ در این صورت

قرار دهید: $x_{S_k} = \bar{x}_{S_k}$ و $x_j = \hat{x}_j$ برای هر $j \in J'$ و به گام ۶ بروید.

گام ۵-۳. اگر $I_{S_k}^- \cup \left(\bigcup_{j \in J''} I_j^-(x) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J - (J'' \cup \{S_k\})} I_j(x) \right) = I$ در این صورت

قرار دهید: $x_{S_k} = \bar{x}_{S_k}$ و $x_j = \bar{x}_j$ برای هر $j \in J''$ و به گام ۶ بروید.

گام ۵-۴. اگر

$$I_{S_k}^- \cup \left(\bigcup_{j \in J'} I_j^+(x) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J''} I_j^-(x) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J - (J' \cup J'' \cup \{S_k\})} I_j(x) \right) = I$$

در این صورت قرار دهید: $x_{S_k} = \bar{x}_{S_k}$ و $x_j = \hat{x}_j$ برای هر $j \in J'$ و $x_j = \bar{x}_j$ برای هر

$j \in J''$

گام ۶. اگر $x_{S_k} = \bar{x}_{S_k}$ در این صورت فرآیندهای زیر را اجرا کنید:

گام ۶-۱. قرار دهید: $\bar{V} := \bar{V} - \{S_k\}$.

گام ۶-۲. مجموعه \bar{V} را بهنگام کنید.

گام ۶-۳. قرار دهید: $t := t + 1$. گام ۶-۴. به گام ۲ بروید.

گام ۷. قرار دهید $k := k + 1$ و به گام ۴ بروید.

ابتدا اعتبار الگوریتم ۱ را در قضیه ۴ بررسی می‌کنیم. سپس، الگوریتم ۱ و دو رویه فوق را در

مثال ۱ به تفصیل توضیح می‌دهیم.



قضیه ۴. بردار x حاصل از الگوریتم ۱ یک جواب شدنی است و U یک کران بالا روی مقدار هدف بهینه مسئله تقلیل یافته می باشد.

اثبات. الگوریتم ۱ با یک جواب شدنی x آغاز می شود. برای تغییر جواب شدنی x بدون افزایش مقدار هدف به رویه تغییر جواب شدنی رجوع می کنیم. در این رویه، اگر جواب x تغییر کند، در این صورت بردار حاصل، شدنی باقی می ماند. گام های ۱-۵ تا ۴-۵ در این رویه را ملاحظه کنید. اکنون، نشان می دهیم که مقدار هدف در طول این رویه افزایش نخواهد یافت. اگر مؤلفه x_j برای $j \in J' \cup J''$ تغییر کند، در این صورت مقدار هدف افزایش نخواهد یافت، زیرا که $\bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j}) > L$ برای بردار تغییر نیافته x و $\bar{J} \neq \emptyset$. همچنین، اگر x_j از \hat{x}_j

به \bar{x}_j ، برای $j \in \bar{J}$ ، تنزل پیدا کند، در این صورت به آسانی می توان بررسی کرد که مقدار هدف افزایش نیافته است. اکنون، نشان می دهیم که U یک کران بالا روی مقدار هدف بهینه مسئله تقلیل یافته است. این مطلب اثبات را کامل می کند. چون بردار x یک جواب شدنی بدون افزایش مقدار هدف باقی می ماند، مقدار هدف آن $U = \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{r_j})$ یک کران بالا روی مقدار هدف بهینه مسئله تقلیل یافته است.

اگر $U' = L$ ، در این صورت به آسانی می توان یک جواب بهینه x^{**} از مسئله (۱)-(۳) به دست آورد به طوری که $Z(x^{**}) \leq U'$ و $Z(x) \geq L$ برای هر $x \in S(A^+, A^-, b)$ باشد. بنابراین، این شرط در نتیجه ۱ بیان می شود. بردار حاصل x از الگوریتم ۱ تحت شرط فوق، یک جواب بهینه برای مسئله تقلیل یافته خواهد بود. یعنی x^{**} می تواند به وسیله ترکیب بردار x و x_j^* ، برای هر $j \in J^*$ ، به دست آید.

نتیجه ۱. اگر $U \leq L$ (یا $U' = L$)، در این صورت بردار حاصل x از الگوریتم ۱، یک جواب بهینه از مسئله تقلیل یافته است.

اثبات. فرض کنید x^* جواب بهینه ای برای مسئله تقلیل یافته باشد. چون $Z(x^*) = L$ ، خواهیم داشت: $Z(x^*) \geq L$ و $U \leq L$ ، $Z(x^*) = \bigvee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^{*r_j}) \vee L$ بردار حاصل x در پایان الگوریتم ۱ دارای این خاصیت است؛ یعنی $Z(x) = L$. بنابراین،



بردار x می‌تواند یک جواب بهینه برای مسئله تقلیل یافته باشد. توجه کنید که اگر شرایط نتیجه ۱ برقرار نباشد، در این صورت داریم $U > L$ و $U = U'$. نتیجه ۲ شرایطی را ارائه می‌دهد که تحت آن‌ها تعدادی از متغیرهای بهینه به‌طور مستقیم تعیین می‌شوند.

نتیجه ۲. اگر اندیس $k \in J$ به‌گونه‌ای موجود باشد که $c_k \cdot x_k^r > U$ ، در این صورت برای هر جواب بهینه $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ داریم: $x_k^* = \bar{x}_k$.

۵- الگوریتمی برای حل مسئله (۱)-(۳)

در این بخش، یک ماتریس مقدار M جهت انعکاس همه خواص مسئله (۱)-(۳) براساس بردار کران پایین \bar{x} ، بردار کران بالا \hat{x} ، و کران پایین (بهنگام شده) آغازین L روی مقدار هدف مسئله (۱)-(۳) تعریف خواهیم کرد. همچنین، روش شاخه و کران اصلاح شده را برای حل مسئله بهینه‌سازی (۱)-(۳) را توضیح می‌دهیم. در خاتمه، نتایج مربوط به بخش‌های قبلی و مفاهیم فوق را در قالب یک الگوریتم بیان می‌کنیم.

با توجه به قضیه ۳ و لم ۴ در [۲۸]، جواب بهینه x^* برای مسئله بهینه‌سازی (۱)-(۳) وجود دارد به‌طوری که $I_j(x^*) = I_j^+$ یا $I_j(x^*) = I_j^-$ ، برای هر $j \in J$. با توجه به $Z(x) = \vee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^r) \vee L$ ، برای هر $x = (x_j)_{j \in J}$ ، $L \geq \vee_{j=1}^n (c_j \cdot \bar{x}_j^r)$ ، با توجه به مفاهیم فوق، ماتریس مقدار $M = (m_{ij})_{|I| \times |J|}$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$(۸) m_{i, \nu j-1} = \begin{cases} c_j \cdot \hat{x}_j^r & q_{ij}^+ = 1, \\ \infty & \text{Otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad m_{i, \nu j} = \begin{cases} 0 & q_{ij}^- = 1, \\ \infty & \text{Otherwise} \end{cases}$$

برای هر $i \in I$ و $j \in J$. روش شاخه و کران را برای حل مسئله (۱)-(۳) با ماتریس مقدار M بخدمت می‌گیریم و روش شاخه و کران در [۲۸] را به‌صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

۱- اگر \hat{x}_j (یا \bar{x}_j) برای شاخه زدن از یک گره به گره دیگر انتخاب شود، در این صورت هرگز \bar{x}_j (یا \hat{x}_j) برای شاخه زدن بیشتر روی گره جاری استفاده نمی‌شود.

۲- مجموعه اندیس J_k را به‌صورت زیر تعریف کنید:



$J_k = \{j \in J \mid \text{تا گره } 0 \text{ تا گره } j\}$ انتخاب شده است k در امتداد شاخه های گره 0 تا گره j

اگر یکی از حالت های زیر رخ دهد، در این صورت نمی توانیم از گره k شاخه بیشتری

بزنیم:

۱-۲. به آخرین سطر ماتریس M برسیم.

۲-۲. متغیرهای انتخابی در امتداد گره 0 به گره k همراه با \bar{x}_j ، برای هر $j \in J - J_k$ ،

همه معادلات را برقرار کند.

۳-۲. هیچ کاندیدی برای برقراری یک معادله با توجه به اصلاح 1 نداشته باشیم.

۳-۳. رابطه (۸) را ملاحظه کنید. فرض کنید Z_k مقدار هدف در امتداد گره 0 تا گره k را

نمایش دهد. اگر نتوانیم شاخه بیشتری روی گره k با مقدار $Z_k \leq L$ بزنیم، در این صورت

شاخه زدن بیشتر روی هر گره را متوقف می کنیم و روش شاخه و کران اصلاح شده خاتمه

می یابد. در این حالت، ممکن است تعدادی گره با مقادیر کمتر از Z_k داشته باشیم.

۴- اگر نتوانیم شاخه بیشتری روی گره k بزنیم، در این صورت می توانیم \bar{x}_j ، برای هر

$j \in J - J_k$ ، به x_j اختصاص بدهیم.

نکات زیر درباره اصلاحات روش شاخه و کران در نظر می گیریم:

۱- اگر نتوانیم شاخه بیشتری روی گره k بزنیم، در این صورت می توانیم یک جواب شدنی x

با استفاده از اصلاح 4 به دست آوریم. اصلاح 3 و رابطه (۸) را ملاحظه کنید. $Z_k(x)$ مرتبط به

مقدار هدف مسئله تقلیل یافته می تواند به وسیله رابطه زیر محاسبه شود:

$$Z_k(x) = \vee_{j \in J} (c_j \cdot x_j^r) = Z_k \vee \left(\vee_{j \in J} (c_j \cdot \bar{x}_j^r) \right).$$

۲- با توجه به نتیجه 1 داریم: $U > L$. بنابراین، اگر یک شاخه از گره 0 به گره k با

$Z_k \leq L$ وجود داشته باشد، در این صورت $Z_k \leq L < U$ یعنی کران بالای آغازین U

می تواند به وسیله $Z_k(x)$ بهبود داده شود. توجه کنید که شاخه زدن بیشتر روی هر گره در

اینجا می تواند متوقف شود زیرا که یک جواب شدنی x برای مسئله تقلیل یافته با

$Z(x) = Z_k(x) \vee L = L$ داریم.

۳- اگر یک شاخه از گره 0 به گره k با $Z_k > L$ وجود داشته باشد، در این صورت داریم:



$$Z_k(x) = Z_k$$

۴- با توجه به حالت‌های ۲ و ۳، ضرورتی ندارد از نماد $Z_k(x)$ برای استفاده در روش شاخه و کران اصلاح شده استفاده شود.

۵- در امتداد شاخه‌ها به هر گره k ، اصلاحیه ۲ را چک کنید. اگر برقرار بود، در این صورت شاخه بیشتری روی این گره نزنید. به علاوه، در این روش نیاز داریم که روی گره با حداقل مقدار هدف شاخه بزنیم.

براساس مفاهیم مورد بحث بالا، الگوریتمی برای یافتن یک جواب بهینه مسئله (۱)-(۳) پیشنهاد می‌کنیم.

الگوریتم ۲. الگوریتمی برای حل مسئله (۱)-(۳):

گام ۱. بردار کران پایین \bar{x} و بردار کران بالا \hat{x} را با استفاده از لم ۱ محاسبه کنید.

گام ۲. ماتریس‌های مشخصه Q^+ و Q^- را با استفاده از رابطه (۵) ایجاد کنید.

گام ۳. مجموعه‌های اندیس I_j^+ ، I_j^- ، J_i^+ و J_i^- را با استفاده از رابطه (۶) محاسبه

کنید.

گام ۴. سازگاری سیستم دوقطبی (۲)-(۳) را با استفاده از قضیه ۱ چک کنید. اگر سیستم

ناسازگار بود، در این صورت توقف کنید! در غیر این صورت، به گام ۵ بروید.

گام ۵. کران پایین آغازین L روی مقدار هدف مسئله (۱)-(۳) با توجه به رابطه (۷)

محاسبه کنید.

گام ۶. اگر $i \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $|J_i^+| + |J_i^-| = 1$ یعنی $J_i^- = \emptyset$ و

$J_i^+ = \{k\}$ (یا $J_i^+ = \emptyset$ و $J_i^- = \{k\}$)، در این صورت برای هر جواب بهینه

$x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ ، مطابق قضیه ۲ داریم: $x_k^* = \hat{x}_k$ (یا $x_k^* = \bar{x}_k$). در این حالت، اگر

$x_k^* = \hat{x}_k$ انتخاب شود، در این صورت کران پایین L را با استفاده از نکته ۲ بهنگام کنید.

گام ۷. کران بالای آغازین U را روی مقدار هدف بهینه مسئله ساده شده با استفاده از

الگوریتم ۱ محاسبه کنید.

گام ۸. اگر $U \leq L$ ، در این صورت مطابق نتیجه ۱، بردار x حاصل از الگوریتم ۱، یک

جواب بهینه مسئله ساده شده است. به گام ۱۳ بروید.



گام ۹. نتیجه ۲ را به کار ببرید. اگر $k \in J$ وجود داشته باشد به طوری که $c_k \hat{x}_k^r > U$ ، در این صورت برای هر جواب بهینه $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ ، داریم: $x_k^* = \bar{x}_k$. سطر(ها) و ستون(های) ماتریس‌های Q^+ و Q^- مطابق با نکته ۱ حذف کنید. سپس، مسئله ساده شده را به وسیله گام ۶ (در صورت امکان) ساده کنید.

گام ۱۰. اگر $Q^+ = Q^- = \emptyset$ ، در این صورت \bar{x}_k به x_k^* اختصاص دهید و به گام ۱۳ بروید.

گام ۱۱. ماتریس مقدار M با استفاده از رابطه (۸) ایجاد کنید.

گام ۱۲. روش شاخه و کران اصلاح شده را روی ماتریس M برای حل مسئله ساده شده به کار ببرید. به علاوه، کران بالای آغازین U می‌تواند به وسیله یک جواب بهتر در فرآیند پیاده‌سازی این روش بهبود داده شود.

گام ۱۳. جواب بهینه و مقدار هدف بهینه مسئله (۱)–(۳) را تولید کنید و پایان. اعتبار الگوریتم ۲ را در قضیه زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۵. الگوریتم ۲ جواب بهینه مسئله (۱)–(۳) به درستی و در تعداد متناهی تکرار تولید می‌کند.

اثبات. الگوریتم ۲ ابتدا سازگاری مسئله (۱)–(۳) را براساس قضیه ۱ چک می‌کند. سپس، مسئله در صورتی که در شرایط گام ۶ صادق باشد، مؤلفه(های) بهینه مطابق این گام تعیین می‌گردد که اعتبار آن مطابق قضیه ۲ بررسی شده است و کران پایین L با استفاده از نکته ۲ بهنگام‌سازی می‌شود. سپس، در گام ۷ کران بالای آغازین U را روی مقدار هدف بهینه مسئله ساده شده با استفاده از الگوریتم ۱ محاسبه می‌کند که اعتبار آن قبلاً ثابت شده است. در صورت برقراری شرایط گام ۸، جواب بهینه مسئله ساده شده به دست می‌آید که اعتبار این گام در نتیجه ۱ ارائه شده است. اعتبار گام ۹ را نیز نتیجه ۲ تضمین می‌کند و ساده‌سازی مسئله بر اساس نکته ۱ انجام می‌شود. پس از انجام ساده‌سازی‌ها، اگر $Q^+ = Q^- = \emptyset$ شد، در این صورت با توجه به اینکه مسئله مینیمم‌سازی است و تابع هدف صعودی است، به تمامی متغیرهای باقیمانده x_k^* مقدار بهینه \bar{x}_k تخصیص داده می‌شود. در غیر این صورت، ماتریس



مقدار M را با استفاده از رابطه (۸) برای مسئله ساده شده ایجاد می‌کنیم و روش شاخه و کران را روی آن پیاده‌سازی می‌کنیم. این رویه به‌طور صریح همه جواب‌های ممکن برای مسئله را مورد در نظر می‌گیرد. از طرف دیگر، ابعاد مسئله متناهی است. از این رو، اعتبار و همگرایی روش شاخه و کران در تعداد متناهی تکرار حاصل می‌شود. با توجه به جواب‌های بهینه به‌دست آمده در گام‌های ۱-۱۲، جواب بهینه و مقدار بهینه مسئله (۱)-(۳) به‌دست خواهد آمد. اکنون برای توضیح الگوریتم‌های ۱ و ۲ و رویه‌های مندرج در الگوریتم ۱ مثال عددی زیر را ارائه می‌کنیم.

۶- مثال عددی

مثال ۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } Z(x) = (\lambda x_1^2) \vee (3x_2^3) \vee (4x_3^4) \vee (2x_4) \vee (9x_5^5) \vee (7x_6^6) \vee (5/5x_7) \vee (\lambda x_8^8),$$

$$\text{s.t. } x \in S(A^+, A^-, b) := \{x \in [0, 1]^8 \mid A^+ox \vee A^-o-x = b\}$$

(۹)

که در آن ماتریس‌های A^+ ، A^- و b به‌صورت زیر هستند:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0/14 & 0/3 & 0/12 & 0/26 & 0/2 & 0/1 & 0/2 & 0/18 \\ 0/5 & 0/2 & 0/48 & 0/52 & 0/3 & 0/75 & 0/25 & 0/41 \\ 0/31 & 0/6 & 0/27 & 0/9 & 0/35 & 0/28 & 0/42 & 0/19 \\ 0/12 & 0/5 & 0/9 & 0/1 & 0/51 & 0/2 & 0/6 & 0/35 \\ 0/05 & 0/2 & 0/07 & 0/06 & 0/03 & 0/15 & 0/1 & 0/08 \\ 0/12 & 0/09 & 0/15 & 0/03 & 0/1 & 0/05 & 0/08 & 0/05 \\ 0/24 & 0/12 & 0/09 & 0/17 & 0/2 & 0/15 & 0/4 & 0/29 \\ 0/7 & 0/45 & 0/72 & 0/4 & 0/55 & 0/66 & 0/3 & 1 \end{bmatrix},$$



$$A^- = \begin{bmatrix} -/12 & -/03 & -/17 & -/3 & -/09 & -/14 & -/02 & -/25 \\ -/75 & -/52 & -/43 & -/55 & -/26 & -/47 & -/8 & -/39 \\ -/26 & -/11 & -/5 & -/2 & -/39 & -/44 & -/16 & -/25 \\ -/53 & -/42 & -/37 & -/44 & -/27 & -/1 & -/5 & -/3 \\ -/07 & -/04 & -/08 & -/01 & -/06 & -/03 & -/16 & -/1 \\ -/03 & -/12 & -/06 & -/01 & -/02 & -/03 & -/05 & -/02 \\ -/31 & -/48 & -/4 & -/16 & -/24 & -/1 & -/15 & -/29 \\ -/72 & -/69 & -/58 & -/73 & -/36 & -/68 & -/35 & -/41 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -/18 \\ -/6 \\ -/45 \\ -/54 \\ -/12 \\ -/09 \\ -/36 \\ -/75 \end{bmatrix} \text{ و.}$$

اکنون مسئله فوق را به وسیله الگوریتم ۲ حل می‌کنیم.

گام ۱. بردارهای کران پایین و بالا به صورت زیر هستند:

$$\bar{x} = (0/2, 0/25, 0/1, 0/4, 0/25, 0/28)^T, \quad \hat{x} = (0/75, 0/6, 0/6, 0/5, 0/9, 0/8, 0/9, 0/75)^T.$$

شایان ذکر است که $b_i > 0$ ، برای هر $i \in I = \{1, \dots, 8\}$ ، و $\bar{x}_j < \hat{x}_j$ ، برای هر

$j \in J = \{1, \dots, 8\}$ ، برقرار است.

گام ۲. ماتریس‌های مشخصه Q^+ و Q^- به صورت زیر هستند:

$$Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

گام ۳. مجموعه‌های اندیس I_j^+ ، I_j^- ، J_i^+ و J_i^- ، برای هر $i \in I$ و $j \in J$ ، به صورت

زیر هستند:

$$I_1^+ = \{6\}, I_2^+ = \{1, 5\}, I_3^+ = \{4, 6\}, I_4^+ = \{1, 3\}, I_5^+ = \{1, 6\}, I_6^+ = \{2, 5\}, I_7^+ = \{1, 4, 7\}, I_8^+ = \{8\},$$

$$I_1^- = \{2\}, I_2^- = \{6, 7\}, I_3^- = \{3, 7\}, I_4^- = \{1\}, I_5^- = I_6^- = \emptyset, I_7^- = \{2, 5\}, I_8^- = \{1\},$$



$$J_1^+ = \{2, 4, 5, 7\}, J_2^+ = \{6\}, J_3^+ = \{4\}, J_4^+ = \{3, 7\}, J_5^+ = \{2, 6\}, J_6^+ = \{1, 3, 5\}, J_7^+ = \{7\}, J_8^+ = \{8\},$$

$$J_1^- = \{4\}, J_2^- = \{1, 7\}, J_3^- = \{3\}, J_4^- = \emptyset, J_5^- = \{7\}, J_6^- = \{2\}, J_7^- = \{2, 3\}, \text{ و } J_8^- = \emptyset.$$

گام ۴. سیستم دو قطبی (۹) سازگار است. بنابراین، به گام ۵ بروید.

گام ۵. کران پایین آغازین L روی مقدار هدف مسئله (۹) به صورت زیر است:

$$L = \sqrt{\prod_{j=1}^8 (c_j \cdot \bar{x}_j^r)} = c_2 \cdot \bar{x}_2^r = 2/99957 \cong 3.$$

گام ۶. چون $J_8^+ = \{8\}$ و $J_8^- = \emptyset$ می‌باشد، خواهیم داشت: $x_8^* = \hat{x}_8 = 0/75$.

کران پایین آغازین L به صورت زیر بهنگام می‌شود: $L = (3) \sqrt{(4/0.8)} = 4/0.8$. بنابراین،

می‌توانیم سطر ۸ و ستون ۸ از ماتریس‌های Q^+ و Q^- حذف کنیم. ماتریس‌های بهنگام شده

به صورت زیر هستند:

$$Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } Q^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

گام ۷. کران‌های بالای آغازین U و U' با

استفاده از الگوریتم ۱ به صورت زیر هستند: $U = 4/95$ و

$$U' = (4/95) \sqrt{(4/0.8)} = 4/95$$

گام ۸. چون $U = 4/95 \not\leq 4/0.8 = L$ ، نمی‌توانیم نتیجه ۱ را به کار ببریم.

گام ۹. چون $c_5 \cdot \hat{x}_5^r = 5/31 > 4/95 = U$ و $c_6 \cdot \hat{x}_6^r = 5/85 > 4/95 = U$ ، نتیجه

می‌شود که $x_5^* = \bar{x}_5 = 0$ و $x_6^* = \bar{x}_6 = 0$. از این رو، ستون‌های ۵ و ۶ از ماتریس‌های



Q^+ و Q^- را حذف می‌کنیم. چون ماتریس‌های Q^+ و Q^- به وسیله گام ۶ نمی‌تواند بیشتر تقلیل یابد، به گام ۱۰ می‌رویم.

گام ۱۰. ماتریس‌های $Q^+ \neq \emptyset$ و $Q^- \neq \emptyset$ است. بنابراین، به گام ۱۱ بروید.

گام ۱۱. ماتریس مقدار M را به صورت زیر تعریف کنید:

$$M = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 2/64 & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 4/95 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3/75 & \infty & \infty & \infty & 4/95 & \infty \\ \infty & \infty & 2/64 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ 4/5 & \infty & \infty & 0 & 3/75 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 0 & \infty & \infty & 4/95 & \infty \end{bmatrix}.$$

گام ۱۲. با بکه‌ارگیری روش شاخه و کران اصلاح شده برای حل مسئله تقلیل یافته،

متغیرهای بهینه مسئله تقلیل یافته به صورت زیر هستند (شکل ۱ ملاحظه نمایید):

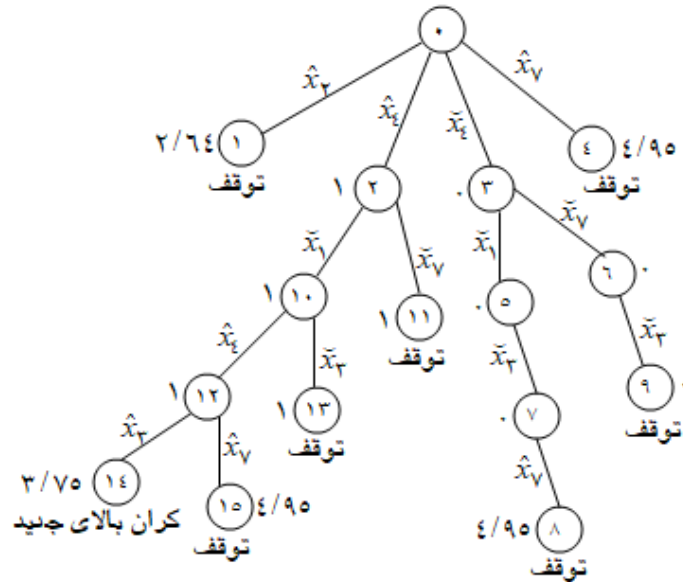
$$x_1^* = \bar{x}_1 = 0/2, x_2^* = \bar{x}_2 = 0/25, x_3^* = \hat{x}_3 = 0/6, x_4^* = \hat{x}_4 = 0/5, x_5^* = \bar{x}_5 = 0/25$$

گام ۱۳. جواب بهینه و مقدار هدف بهینه مسئله (۱۱) به صورت زیر است:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*)^T = (0/2, 0/25, 0/6, 0/5, 0, 0, 0/25, 0/75)^T, Z(x^*) = \bigvee_{j=1}^8 (c_j x_j^*) = (3/75) \vee (4/0.8) = 4/0.8 = L.$$

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های معادلات رابطه فازی دو قطبی با عملگر ماکزیمم-ضرب مورد مطالعه قرار گرفت. ساختار دامنه شدنی آن به طور خلاصه مورد رسیدگی قرار گرفت. الگوریتمی برای یافتن کران بالا برای مقدار هدف بهینه آن طراحی گردید. چند ویژگی آن در ارتباط با کران پایین مقدار هدف بهینه بیان شد. روش شاخه و کران برای حل مسئله براساس یک ماتریس مقدار اصلاح گردید.



شکل ۱. روش شاخه و کران اصلاح شده

در پایان، یک الگوریتم تسریع یافته برای حل مسئله اصلی براساس الگوریتم فوق و روش شاخه و کران اصلاح شده، پیشنهاد گردید. در کارهای آینده، سعی بر این خواهد بود که بهینه‌سازی فرم‌های دیگری از توابع هندسی با محدودیت‌های معادلات رابطه فازی را مورد بررسی قرار دهیم و الگوریتم‌هایی برای ردیابی جواب‌های بهینه آن‌ها ارائه دهیم و کاربرد آن‌ها را در مدل‌بندی سیستم‌های انتقال داده مورد بررسی قرار دهیم.

۸- پی‌نوشت‌ها

۱. Duffin et al.
۲. Zener
۳. Monomial fitting
۴. Posynomial
۵. Entropy
۶. Cross entropy
۷. Dantzig et al.
۸. Robust geometric programming
۹. Bellman & Zadeh
۱۴. Yang et al.
۱۵. Wu
۱۶. Fuzzy relation equations
۱۷. Zhou et al.
۱۸. Semi-latticized
۱۹. Bipolar fuzzy relation equations
۲۰. Freson et al.
۲۱. NP-hard
۲۲. Li & Liu



- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| ۱۰. Peer-to-Peer | ۲۳. Characteristic matrix |
| ۱۱. BitTorrent | ۲۴. Positive literal |
| ۱۲. Fuzzy relation inequalities | ۲۵. Negative literal |
| ۱۳. Wang et al. | ۲۶. Characteristic Boolean formula |

۹- منابع

- [۱] Duffin, R., Peterson, E., Zener, C., Geometric programming-theory and application. Wiley, New York, ۱۹۶۷.
- [۲] Zener, C., Eng design by geometric programming. Wiley, New York, ۱۹۷۱.
- [۳] Wilde, D., Beightler, C., Foundations of optimization. Prentice Hall, Englewood Cliffs, ۱۹۶۷.
- [۴] Boyd, S., Vandenberghe, L., Convex optimization. Cambridge University Press, Cambridge, ۲۰۰۴.
- [۵] Dantzig, G., Johnson, S., White, W., Shape-preserving properties of univariate cubic L^1 splines. Management Science ۵(۱), ۱۹۵۸, ۳۸-۴۳.
- [۶] Peterson, E., The origins of geometric programming. Annals of Operations Research, ۱۰۵(۱-۴), ۲۰۰۱, ۱۵-۱۹.
- [۷] Kyparsis, J., Sensitivity analysis in geometric programming: theory and computations. Annals of Operations Research, ۲۷(۱), ۱۹۹۰, ۳۹-۶۴.
- [۸] Alejandro, J., Allueva, A., Gonzalez, J., A general alternative procedure for solving negative degree of difficulty problems in geometric programming. Computational Optimization and Applications, ۲۷(۱), ۲۰۰۴, ۸۳-۹۳.
- [۹] Singh, J., Nookala, V., Luo Z.-Q., Sapatnekar, S., Robust gate sizing by geometric programming. In: Proceedings of the ۴۲nd IEEE/ACM design automation conference (DAC), pp ۳۱۵-۳۲۰, ۲۰۰۵.
- [۱۰] Bellman, R.E., Zadeh, L.A., Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, ۱۷, ۱۹۷۰, ۱۴۱-۱۶۴.
- [۱۱] Adel Rastkhiz, S. E., Mobini Dehkordi, A., Yadollahi Farsi, J., Introducing a model for evaluating entrepreneurial opportunities based on fuzzy approach.



- Management Research in Iran, ۲۳(۱), ۲۰۱۹, ۷۵-۹۷.
- [۱۲] Mosavi, S.F., Azar, A., Rajabzadeh, A., Khadivar, A., Designing model for performance-based budget using fuzzy cognitive mapping and software systems methodology and fuzzy topsis. Management Research in Iran, ۲۲(۱), ۲۰۱۸, ۲۹۹-۳۲۲.
- [۱۳] Farrokh, M, Fuzzy Portfolio Selection Model by Considering the Return and Downside Risk. Modern Research in Decision Making, ۶(۲), ۲۰۲۱, ۱-۱۸.
- [۱۴] Kouchaki Tajani, T., Mohtashami, A., Amiri, M., Ehtesham Rasi, R., Designing an improved Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System based on Whale Optimization Algorithm to predict blood donation. Modern Research in Decision Making, ۶(۲), ۲۰۲۱, ۴۹-۷۰.
- [۱۵] Yang, X.-P., Zhou, X.-G., Cao, B.-Y., Latticized linear programming subject to max-product fuzzy relation inequalities with application in wireless communication. Information Sciences, ۳۵۸-۳۵۹, ۲۰۱۶, ۴۴-۵۵.
- [۱۶] Yang, X.-P., Lin, H.-T., Zhou, X.-G., Cao, B.-Y., Addition-min fuzzy relation inequalities with application in bittorrent-like peer-to-peer file sharing system. Fuzzy Sets Systems, ۳۴۳, ۲۰۱۸, ۱۲۶-۱۴۰.
- [۱۷] Wang, P.-Z., Zhang, D.-Z., Sachedz, E., Lee, E.-S., Latticized linear programming and fuzzy relational inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, ۱۵۹, ۱۹۹۱, ۷۲-۸۷.
- [۱۸] Wu, Y.-K., Optimizing the geometric programming problem with single-term exponents subject to max-min fuzzy relational equation constraints. Mathematical and Computer Modelling, ۴۷, ۲۰۰۸, ۳۵۲-۳۶۲.
- [۱۹] Zhou, X.-G., Cao, B.-Y., Yang, X.-P., The set of optimal solutions of geometric programming problem with max-product fuzzy relational equations constraints". International Journal of Fuzzy Systems, ۱۸, ۲۰۱۶, ۴۳۶-۴۴۷.
- [۲۰] Yang, X.-P., Zhou, X.-G., Cao, B.-Y., Single-variable term semi-latticized fuzzy relation geometric programming with max-product operator. Information



Sciences, ۳۲۵, ۲۰۱۵, ۲۷۱-۲۸۷.

- [۲۱] Yang, X.-P., Linear programming method for solving semi-latticized fuzzy relation geometric programming with max-min composition. International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Systems, ۵, ۲۰۱۵, ۷۸۱-۸۰۴.
- [۲۲] Freson, S., De Baets, B., De Meyer, H., Linear optimization with bipolar max-min constraints. Information Sciences, ۲۳۴, ۲۰۱۳, ۳-۱۵.
- [۲۳] Li, P., Liu, Y., Linear optimization with bipolar fuzzy relational equation constraints using the Lukasiewicz triangular norm. Soft Computing, ۱۸, ۲۰۱۴, ۱۳۹۹-۱۴۰۴.
- [۲۴] Li, P., Jin, Q., Fuzzy relational equations with min-biimplication composition. Fuzzy Optimization and Decision Making, ۱۱, ۲۰۱۲, ۲۲۷-۲۴۰.
- [۲۵] Liu, C.-C., Lur, Y.-Y., Wu, Y.-K., Linear optimization of bipolar fuzzy relational equations with max-Lukasiewicz composition. Information Sciences, ۳۶۰, ۲۰۱۶, ۱۴۹-۱۶۲.
- [۲۶] Aliannezhadi, S., Shahab Ardalan, S., Abbasi Molai, A., Maximizing a monomial geometric objective function subject to bipolar max-product fuzzy relation constraints. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, ۳۲, ۲۰۱۷, ۳۳۷-۳۵۰.
- [۲۷] Zhou, X.G., Ahat, R., Geometric programming problem with single-term exponents subject to max-product fuzzy relational equations. Mathematical and Computer Modelling, ۵۳, ۲۰۱۱, ۵۵-۶۲.
- [۲۸] Aliannezhadi, S., Abbasi Molai, A., Geometric programming with a single-term exponent subject to bipolar max-product fuzzy relation equation constraints. Fuzzy Sets and Systems, ۳۹۷, ۲۰۲۰, ۶۱-۸۳.
- [۲۹] Aliannezhadi, S., Abbasi Molai, A., A new algorithm for geometric optimization with a single-term exponent constrained by bipolar fuzzy relation equations. Iranian Journal of Fuzzy Systems, ۱۸(۱), ۲۰۲۱, ۱۳۷-۱۵۰.