



پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری

دوره ۴، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صص ۲۱۴-۲۳۴

نوع مقاله: پژوهشی

## تعیین الگوی ایده‌آل واحدها با بررسی هم‌زمان کمترین هزینه، بیشترین درآمد و کوتاه‌ترین فاصله

سیده فاطمه باقری<sup>۱</sup>، علیرضا امیرتیموری<sup>۲</sup>، سهراب کردرستمی<sup>۳\*</sup>، منصور صوفی<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۲- استاد، گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۳- استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

۴- استادیار، گروه مدیریت، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۰۷

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) است. در این تکنیک ناکارایی واحدهای تصمیم‌گیری را می‌توان با افزایش سطح خروجی‌ها و یا کاهش سطح ورودی‌ها بهبود بخشید. برای هر واحد ناکارآ نقطه تصویری روی مرز کارآ به عنوان الگوی تعیین می‌شود. در این مقاله روشی ارائه می‌شود که در آن برای هر واحد ناکارآ الگوی ایده‌آلی به دست می‌آید که به صورت ترکیب محدب نقاط تصویر کارآیی هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله می‌باشد. نکته قابل ذکر این است که اگرچه تضمینی وجود ندارد که الگوی به دست آمده روی مرز کارآ قرار گیرد ولی کارآیی آن به مراتب بیشتر از کارآیی واحد تحت ارزیابی‌اش خواهد بود و به‌طور هم‌زمان سه هدف کمترین هزینه، بیشترین درآمد و کوتاه‌ترین فاصله را تا حد ممکن برآورده می‌کند. همچنین تضمین می‌شود هزینه ایده‌آل هر واحد کمتر یا مساوی هزینه مشاهده شده‌ی آن واحد و درآمد ایده‌آل هر واحد نیز بیشتر یا مساوی درآمد مشاهده شده‌ی آن واحد است. بنابراین پیدا کردن چنین الگوی ایده‌آلی برای هر واحد ناکارآ می‌تواند از اهمیت بالایی برخوردار باشد. در انتها، مدل پیشنهادی روی یک مثال ساده پیاده‌سازی خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، الگوی ایده‌آل، کارآیی، کوتاه‌ترین فاصله



## ۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتریک است که برای سنجش کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری که وظایف مشابهی را در یک سیستم انجام می‌دهند، استفاده می‌شود و با به‌کارگیری از چند ورودی (منابع)، چند خروجی (خدمات) تولید می‌نمایند.

نخستین بار اندازه‌کارایی تکنیکی توسط دبرو<sup>۱</sup> آغاز گردید [۱] و فارل<sup>۲</sup> آن را معرفی نمود [۲]. اولین مقاله تحلیل پوششی داده‌ها با هدف توسعه دیدگاه فارل توسط چارنز<sup>۳</sup>، کوپر<sup>۴</sup> و رودز<sup>۵</sup> به چاپ رسید که در آن مدلی به نام CCR که مخفف اسامی این سه پژوهشگر است، معرفی گردید [۳]. با افزودن اصل بازده به مقیاس متغیر به تکنولوژی تولید مدل CCR، مدلی به نام BCC توسط بنکر<sup>۶</sup>، چارنز و کوپر معرفی گردید که در بسیاری از موارد در مسائل حقیقی زندگی به واقعیت نزدیک‌تر می‌باشد [۴]. در حقیقت تفاوت این دو مدل در شکل مجموعه امکان تولیدشان می‌باشد که در این مدل با توجه به اضافه شدن محدودیت  $\sum z_j \lambda_j = 1$ ، نقطه تصویر واحد ناکارآ در پوسته محدب واحدهای کارآ قرار می‌گیرد.

چارنز در سال ۱۹۸۵ مدلی ارائه نمود که به‌طور همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را افزایش می‌دهد و آن را مدل جمعی یا پارآتوکوپمنز نام‌گذاری نمود [۵]. در مدل جمعی به‌دنبال بیشترین فاصله واحد تا مرز کارا هستیم که این فاصله تحت نرم یک، اندازه‌گیری می‌شود. اندازه راسل از کارایی تکنیکی نخست، توسط فر<sup>۷</sup> و لاول<sup>۸</sup> پیشنهاد گردید [۶]. تابع هدف آن به‌صورت ترکیب فاکتورهای انقباض ورودی و فاکتورهای انبساط خروجی در یک روش جمعی ارائه شد. پس از آن پاستور<sup>۹</sup> و همکاران، مدل راسل<sup>۱۰</sup> پیشرفته را جهت اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرارائه نمودند که در آن به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌ها با نسبت‌های گوناگون قابلیت کاهش و افزایش دارند [۷].

تن<sup>۱۱</sup> اندازه‌ای برای مدل‌های جمعی بر پایه متغیرهای کمکی به نام SBM<sup>۱۲</sup> معرفی نمود [۸]. این اندازه نسبت به تغییر واحد هم در ورودی‌ها و هم در خروجی‌ها و انتقال پایدار است. از محاسن دیگر این اندازه، یکنوایی نزولی آن می‌باشد. همچنین دوآل این مدل را می‌توان به عنوان پیشینه‌سازی سود تعبیر نمود. حرکت به سمت مرز برای واحدهای ناکارآ در مدل SBM با به‌کارگیری از نرم یک انجام می‌شود.

فارل، اندازه کارایی هزینه را معرفی نمود که در آن علاوه بر داده‌های ورودی و خروجی به قیمت ورودی‌های واحد تصمیم‌گیرنده نیز نیاز است و هدف آن کمینه‌سازی هزینه می‌باشد [۲].



پس از آن فر و همکارانش، کارآیی هزینه را توسعه دادند [۹]. تن با ثابت فرض کردن قیمت‌های ورودی، مشکلات تفاوت قیمت ورودی‌ها را رفع نمود [۱۰]. کاسمنن<sup>۱۳</sup> و پست<sup>۱۴</sup> برای کارآیی هزینه کل، کران‌های بالا و پایین را به دست آوردند [۱۱، ۱۲]. جهان‌شاهلو و همکاران نیز روشی جدید برای اندازه‌گیری کارآیی هزینه کل واحدها ارائه نمودند [۱۳]. اخیراً شنگ<sup>۱۵</sup> و همکاران یک مسئله برنامه‌ریزی صحیح مختلط را جهت تعیین مجموعه‌ای از اهداف برای هر واحد ناکارآ روی مرز کارآیی قوی با در نظر گرفتن کمترین هزینه ارائه کردند [۱۴]. در کارآیی درآمد علاوه بر داده‌های ورودی و خروجیه قیمت خروجی‌های واحد تصمیم‌گیرنده هم نیاز است که هدف آن بیشینه‌سازی درآمد می‌باشد. فار و همکارانش در زمینه بسط و توسعه کارآیی درآمد، نقش ارزشمندی داشته‌اند [۹]. هانگ<sup>۱۶</sup>، روشی را برای تعیین اهداف درآمد روی مرز کارآ ارائه نمود [۱۵]. در یکی دو دهه اخیر تعمیم‌ها و کاربردهای فراوانی از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها گزارش شده است که از جمله این موارد، عبارت‌اند از آذر و همکاران (۱۳۹۱)، فضلی و آذر (۱۳۸۱)، موسوی و نجفی (۱۳۹۸) و نیک‌نشان و همکاران (۱۳۹۷).

یکی از کاربردهای پایه‌ای مدل‌ها، محاسبه کارایی واحدها می‌باشد. هر واحدی که به مرز مجموعه امکان تولید نزدیکتر باشد، کارایی بیشتری خواهد داشت. بنابراین کارایی هر واحد با فاصله آن واحد از مرز مجموعه امکان تولید، رابطه عکس خواهد داشت.

در دهه‌های اخیر، پژوهش‌های زیادی در زمینه پیدا کردن نزدیک‌ترین نقطه تصویر برای هر واحد ناکارآ روی مرز کارآیی انجام شده که شمار زیادی از پژوهش‌گرها به این موضوع پرداخته‌اند. از آن جمله می‌توان به چند مورد اشاره نمود. آپارچیو<sup>۱۷</sup> و همکاران، روشی ارائه کردند که نزدیک‌ترین هدف را برای یک واحد مفروض بر مبنای معیار تشابه، که همان نزدیکی میان ورودی‌ها و خروجی‌ها و اهداف متناظر هر واحد ناکارآ می‌باشد، مستقیماً با حل مسئله برنامه‌ریزی صحیح مختلط تعیین می‌کند [۱۶]. اندازه EDB<sup>۱۸</sup> با رویکرد رسیدن به کمینه فاصله به مرز کارآ برای واحدهای ناکارآ توسط امیرتیموری و کردرستمی معرفی گردید که در آن از نرم اقلیدسی به‌کارگیری شد [۱۷]. آپارچیو و پاستور، روشی را بر پایه اندازه خروجی محور راسل و با گسترش وجهک‌های کارآیی بعد کامل جهت تعیین نزدیک‌ترین هدف ارائه دادند که شامل چهار گام بود [۱۸]. جهان‌شاهلو و همکاران، نزدیک‌ترین اهداف را با رویکرد توابع فاصله‌ای جهت‌دار معرفی نمودند [۱۳]. در میان انواع مدل‌های DEA، اندازه بهبودیافته راسل



می‌تواند میزان ناکارایی واحدها را در جهت ورودی و خروجی اندازه‌گیری کند. چن<sup>۱۶</sup> و همکاران، روش جدیدی بر پایه اندازه بهبودیافته راسل برای اندازه‌گیری کارایی محیطی واحدها پیشنهاد نمودند؛ به‌طوری که واحدهای ناکارآ با کم‌ترین تلاش به مرز کارآ خواهند رسید. این مدل در حضور خروجی‌های نامطلوب برای اندازه‌گیری کارایی واحدها ارائه شد [۱۹]. شنگ و همکاران، بر روی نزدیک‌ترین نقطه تصویر و هزینه حاشیه‌ای تمرکز داشته‌اند. برای هر واحد ناکارآ، به‌طور همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را افزایش داده که با کمینه هزینه ورودی‌ها روی مرز کارآی قوی، تصویر شود [۱۴]. مرادی و همکاران، روش شامل دو گام برای تعیین نقطه تصویر متناظر هر واحد ناکارآ با نزدیک‌ترین فاصله بر روی ابرصفحه‌های سازای کارآی قوی ارائه داده و از بردارهای گرادیان به‌کارگیری کرده‌اند [۲۰]. در جدول ۱ نمونه کارهایی که در این زمینه انجام شده به همراه توضیح روش‌ها ارائه شده است.

جدول ۱: مروری بر مدل‌ها

نام نویسنده	عنوان مقاله	روش کار	سال انتشار	توضیح
آپارچیو و همکاران	Closest target and minimum distance to the pareto-efficient frontier in DEA	به‌کارگیری مجموعه پآراتو کارآ و محدودیت‌های خطی با یک مدل برنامه‌ریزی صحیح مختلط جهت تعیین نزدیک‌ترین نقطه تصویر	۲۰۰۷	این مدل نزدیک‌ترین هدف برای یک واحد را بر مبنای معیار تشابه که همان نزدیکی میان ورودی‌ها و خروجی‌ها و اهداف متناظر واحد ناکارآ می‌باشد با حل مسئله برنامه‌ریزی صحیح مختلط تعیین می‌کند
امیرتیموی و کردرستمی	A Euclidean distance based measure of efficiency in data envelopment analysis	به‌کارگیری از نرم اقلیدسی و به دست آوردن نزدیک‌ترین ابرصفحه مرجع بعد کامل به واحد تحت ارزیابی	۲۰۱۰	در این روش نخست مدلی را برای تعیین ضرایب ابرصفحه تکیه کننده مرجع بعد کامل تعیین نمودند. به‌طوری که این ابرصفحه، نزدیک‌ترین ابرصفحه مرجع بعد کامل به واحد تحت ارزیابی می‌باشد. سپس نزدیک‌ترین نقطه تصویر با از نرم اقلیدسی برای هر واحد ناکارآ روی مرز کارآ مشخص گردید.



نام نویسنده	عنوان مقاله	روش کار	سال انتشار	توضیح
زو و همکاران	A simple MILP to determine closest target in non-oriented DEA satisfying strong monotonicity	روش آن‌ها شامل ۴ ویژگی برای به دست آوردن یکتـوایی می‌باشد [۲۱].	۲۰۱۷	زو و همکاران یک اندازه کارایی خوش تعریف بر پایه نزدیک‌ترین اهداف غیر جهتی را در ۴ گام ارائه نمودند.
رز و همکاران	Performance evaluation through DEA benchmarking adjusted to goals	آن‌ها از روش تحلیل پوششی داده‌ها برای مقایسه عملکرد واقعی واحدهای تصمیم‌گیری در مقابل الگویابی روی مرز کارآ به‌کارگیری می‌کنند [۲۲].	۲۰۱۸	آن‌ها این دو شرط را تعیین کردند. ۱. هدف DEA باید تا حد ممکن نزدیک به عملکرد واقعی باشد. ۲. اهداف تحلیل پوششی داده‌ها باید تا حد ممکن نزدیک به اهداف مدیریتی باشد.
شنگ و همکاران	Target setting with minimum improving cost in DEA: A mixed integer linear programming	آن‌ها از کاهش هزینه حاشیه‌ای برای کارآ شدن واحدهای ناکارآ به‌کارگیری کرده‌اند.	۲۰۱۹	این مقاله بر روی نزدیک‌ترین نقطه تصویر و هزینه حاشیه‌ای تمرکز داشته است. برای هر واحد ناکارآ به‌طور همزمان ورودی‌ها را کاهش و خروجی‌ها را افزایش داده که با کمینه هزینه ورودی‌ها روی مرز کارآی قوی تصویر شود.
مرادی و همکاران	Closest reference point and strong efficient frontier in DEA	آن‌ها روش دو گام‌ای برای تعیین نقطه تصویر متناظر هر واحد ناکارآ با نزدیک‌ترین فاصله بر روی ابرصفحه‌های سازای کارآی قوی ارائه دادند.	۲۰۱۹	برای به دست آوردن نزدیک‌ترین نقطه مرجع هر واحد ناکارآ روی مرز کارآ با کمینه فاصله از بردار گرادیان به‌کارگیری کرده‌اند. در بخش دیگر این مقاله گسترش مجموعه امکان تولید و بهبود واحدهای کارآ بررسی شده است.

بیشتر مطالعاتی که در زمینه پیدا کردن نقطه تصویر برای واحدهای ناکارآ انجام شده، تنها بر روی یک هدف تمرکز داشته است. روشی که در این مقاله ارائه می‌شود برای هر واحد ناکارآ الگوی ایده‌آلی به دست می‌آورد. منظور از الگوی ایده‌آل، به دست آوردن نقطه تصویر برای هر واحد تصمیم‌گیری می‌باشد. اگرچه برای این الگو لزوماً تضمینی وجود ندارد که روی مرز کارآ قرار گیرد ولی تضمین می‌کند که نخست بر واحد تحت ارزیابی اش غالب گردد. منظور از غالب شدن یعنی دارای ورودی‌های نابیشتر و خروجی‌هایی ناکمتر از ورودی‌ها و خروجی‌های واحد



تحت ارزیابی باشد. بنابراین از کارآیی به مراتب بیشتری نیز برخوردار خواهد بود. دوم در ترکیب محذب نقاط تصویر به‌دست آمده از مدل‌های هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله قرار گیرد که این نقطه تصویر می‌تواند به‌طور همزمان سه هدف کمینه هزینه، بیشینه درآمد و کمینه فاصله را تا حد ممکن برآورده کند. به‌دست آوردن چنین الگویی برای هر واحد ناکارآ می‌تواند از جهات بسیاری حائز اهمیت باشد. در این پژوهش مقالات متعددی را برای یافتن نقاط ضعف و قوت بررسی نمودیم. در نهایت از یک روش وزن دهی ساده (وزن هر یک از پارامترها جهت ساده‌سازی محاسبات ۱۰ در نظر گرفته شده است) به‌کارگیری شده تا نشان دهیم پژوهش ما نسبت به پژوهش‌های پیشین فراگیرتر بوده و از بیشتر پارامترهای موجود در آن استفاده شده است. در واقع سعی کرده‌ایم که نقاط ضعف مطالعات گذشته را پوشش دهیم. نتایج در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۲: امتیازبندی مدل‌ها

روش‌ها	هزینه	فاصله	درآمد	نزدیک‌ترین هدف	بهبود عملکرد واحدها	امتیاز مدل‌ها
به‌کارگیری از مجموعه پارآ توکارآ و محدودیت-های خطی با یک مدل برنامه‌ریزی صحیح مختلط جهت به دست آوردن نزدیک‌ترین نقطه تصویر هر واحد ناکارآ		✓		✓	✓	۳۰
به‌کارگیری از نرم اقلیدسی و به دست آوردن نزدیک‌ترین ابرصفحه مرجع بعد کامل به واحد تحت ارزیابی		✓		✓	✓	۳۰
روش آن‌ها شامل ۴ ویژگی برای به‌دست آوردن یکنوایی می‌باشد.		✓			✓	۲۰
آن‌ها از روش تحلیل پوششی داده‌ها برای مقایسه عملکرد واقعی واحدهای تصمیم‌گیری درمقابل الگویابی روی مرز کارآ به‌کارگیری می‌کنند.		✓		✓	✓	۳۰
آن‌ها از کاهش هزینه حاشیه‌ای برای کارآ شدن واحدهای ناکارآ به‌کارگیری کرده‌اند.	✓	✓		✓	✓	۴۰
آن‌ها روش دو گامی برای تعیین نقطه تصویر متناظر هر واحد ناکارآ با نزدیکترین فاصله بر روی ابرصفحه‌های سازای کارآی قوی ارائه داده و از بردارهای گرادیان به‌کارگیری کرده‌اند.		✓		✓	✓	۳۰
روش پیشنهادی	✓	✓	✓	✓	✓	۵۰



این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ مروری بر اندازه کارایی‌های تخصیصی و مدل کوتاه‌تری نفاصله انجام می‌گیرد. مدل پیشنهادی در بخش ۳ مطرح می‌گردد. در بخش ۴ مدل پیشنهاد شده بر روی یک مثال عددی ساده پیاده سازی شده است. نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

## ۲. مروری بر اندازه کارایی‌های تخصیصی و مدل کوتاه‌ترین فاصله

فرض کنید  $n$  شمار واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد ارزیابی است به طوری که هر واحد  $m$  ورودی  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$  مصرف کرده و  $s$  خروجی  $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$  تولید می‌کند. هر  $DMU_j$  با زوج  $(x_j, y_j)$  نشان داده می‌شود. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده می‌شود و با  $T$  نمایش داده می‌شود. مجموعه  $T$  را طوری در نظر می‌گیریم که در اصول موضوعه شمول مشاهدات، بی‌کرانی اشعه، امکان‌پذیری، تحدب و اصل کمینه برون‌یابی صدق کند. مجموعه امکان تولید به گونه زیر تعریف می‌شود.

$$T = \{(x, y) | X \text{ می‌تواند } y \text{ را تولید کند} | (x, y) \in T\} \quad (1)$$

مجموعه امکان تولید با فرض بازده به مقیاس متغیر توسط بنکر و همکاران (۱۹۸۴) به گونه زیر ارائه شد [۴].

$$T = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (2)$$

### ۲-۱. کارایی‌های تخصیصی

رسیدن به سطح معینی از خروجی‌ها با صرف کم‌ترین هزینه ورودی‌ها را کارایی هزینه نامند که در آن داده‌ها مربوط به قیمت ورودی‌ها در نظر گرفته می‌شود. مدل کارایی هزینه در سال (۱۹۵۷) توسط فارل ارائه شد [۲].

این مدل با فرض بازده به مقیاس متغیر به گونه زیر فرمول‌بندی می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$



در فرمول بالا  $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)^t$  بردار قیمت ورودی‌ها و  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)^t$  بردار کمینه هزینه ورودی‌هاست.  $(\bar{x}_i - s_i^-, y_{rp} + s_r^+)$  نقطه تصویر اندازه کارآیی هزینه برای واحد تحت ارزیابی  $p$  است. کارآیی هزینه واحد تحت ارزیابی  $p$  از نسبت هزینه ایده‌آل به هزینه دیده شده به دست می‌آید که مقدار آن کمتر یا مساوی یک است. این مقدار به گونه زیر تعریف می‌شود.

$$CE_p = \frac{\sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m c_i x_{ip}}$$

واحد تحت ارزیابی  $p$  کارآیی هزینه است اگر و فقط اگر  $CE_p = 1$  باشد و متغیرهای کمکی  $s_r^+ = 0, s_i^- = 0$  در غیر این صورت این واحد، ناکارآیی هزینه است. رسیدن به بیشترین مقدار خروجی‌ها با صرف سطح معینی از ورودی‌ها را کارآیی درآمد نامند که در آن داده‌ها مربوط به قیمت خروجی‌ها در نظر گرفته می‌شود. اکنون مدل کارآیی درآمد را با فرض بازده به مقیاس متغیر به گونه زیر فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s p_r \bar{y}_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip} \quad i = 1, \dots, m \quad (4) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \bar{y}_r \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

بردار قیمت خروجی‌ها و  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)^t$  بردار بیشینه درآمد خروجی‌هاست.  $(x_{ip} - s_i^-, \bar{y}_r + s_r^+)$  نقطه تصویر اندازه کارآیی درآمد برای واحد تحت ارزیابی  $p$  است. کارآیی درآمد واحد تحت ارزیابی  $p$  از نسبت درآمد ایده‌آل به درآمد دیده شده به دست می‌آید که مقدار آن بیشتر یا مساوی یک است. این مقدار به گونه زیر تعریف می‌شود.

$$RE_p = \frac{\sum_{r=1}^s p_r \bar{y}_r}{\sum_{r=1}^s p_r y_{rp}}$$

واحد تحت ارزیابی  $p$  کارآیی درآمد است اگر و فقط اگر  $RE_p = 1$  باشد و متغیرهای کمکی شود. در غیر این صورت این واحد، ناکارآیی درآمد است.





## ۲-۲. روش کوتاه‌ترین فاصله

در دهه‌های اخیر، پژوهش‌های زیادی در زمینه کوتاه‌ترین فاصله انجام شده است. روشی که در سال ۲۰۰۷ توسط آپارچیو و همکاران [۴] ارائه شد، یکی از این پژوهش‌ها به‌شمار می‌آید که در آن نزدیک‌ترین هدف را برای یک واحد مفروض بر مبنای معیار تشابه که همان نزدیکی میان ورودی‌ها و خروجی‌ها و اهداف متناظر هر واحد ناکارآ می‌باشد، تعیین می‌کند. این روش بر پایه توصیف مجموعه نقاط پاراتوکارآ است که بر واحدهای تحت ارزیابی توسط مجموعه‌ای از محدودیت‌های خطی غالب می‌باشد و هدف آن به بیشینه رساندن کارآیی یا کمینه رساندن میزان فاصله است. در این روش نخست واحدهای کارآی را راسی را تعیین می‌کنیم. سپس با حل مدل برنامه‌ریزی صحیح مختلط زیر نزدیک‌ترین نقطه تصویر برای هر یک از واحدهای ناکارآ روی مرز کارآ مشخص خواهد شد.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1 - 1/m \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ip}}{1 + 1/s \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rp}} \\ \text{s. t:} \quad & \sum_{j \in E} \lambda_j x_{ij} = x_{ip} - s_i^- \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j \in E} \lambda_j y_{rj} = y_{rp} + s_r^+ \quad r = 1, \dots, s \\ & - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_j + d_j = 0 \quad j \in E \\ & v_i x_{ip} \geq 1, u_r y_{rp} \geq 1, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \\ & d_j \leq M b_j, \quad \lambda_j \leq M(1 - b_j), \quad j \in E \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, b_j \in \{0, 1\}, \quad d_j \geq 0, \lambda_j \geq 0, \quad j \in E \\ & s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

در فرمول بالا،  $E$ ، مجموعه همه واحدهای کارآی راسی را تشکیل می‌دهد که از طریق

مدل BCC مشخص شده‌اند. وزن‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب با  $v_i$  و  $u_r$  نشان داده شده‌اند.  $s_{ip}^-$  و  $s_{rp}^+$  به ترتیب متغیرهای کمکی ورودی‌ها و خروجی‌هاست و  $M$  عدد مثبت بزرگی فرض شده است.  $(x_{ip} - s_{ip}^-, y_{rp} + s_{rp}^+)$  نقطه تصویر اندازه کارآیی  ${}^{22} \text{ERG}$  برای واحد تحت ارزیابی  $p$  را مشخص می‌کند. برای واحدهای کارآ، مقدار تابع هدف مدل برابر با یک خواهد بود. از ویژگی‌های اصلی این روش می‌توان موارد زیر را بیان نمود:

۱. یک روش کلی است که منجر به اهدافی با معیار نزدیکی میان ورودی‌ها و خروجی‌ها و



اهداف نظیرشان می‌شود.

۲. این روش تضمین می‌کند که نزدیک‌ترین نقطه تصویر روی مرز پاراتوکارا به دست می‌آید.

۳. مستقیماً با حل یک مسئله برنامه‌ریزی صحیح مختلط، نزدیک‌ترین اهداف به دست می‌آید.

### ۳. مدل پیشنهادی

برای هر واحد ناکارا یک نقطه ایده‌آل روی مرز کارا است، به طوری که آن واحد ناکارا می‌تواند با کم کردن ورودی‌هایش یا افزودن خروجی‌هایش و یا به‌طور همزمان با کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌هایش به نقطه ایده‌آل برسد. نقطه ایده‌آل به دست آمده به عنوان یک الگو برای آن واحد ناکارا محسوب می‌شود. بنابراین تعیین یک الگوی مناسب می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. پژوهش‌های زیادی جهت به دست آوردن نقطه تصویر واحدهای ناکارا انجام شده اما روش‌هایشان بیش‌تر بر پایه یک هدف، پیاده‌سازی شده است. در این مقاله مدلی ارائه می‌شود که در آن برای هر واحد ناکارا الگوی ایده‌آلی به دست می‌آید. منظور از الگوی ایده‌آل، به دست آوردن نقطه تصویر برای هر واحد تصمیم‌گیری می‌باشد. اگرچه برای این الگو لزوماً تضمینی وجود ندارد که روی مرز کارا قرار گیرد ولی تضمین می‌کند که نخست بر واحد تحت ارزیابی‌اش غالب گردد. منظور از غالب شدن یعنی دارای ورودی‌های نابیش‌تر و خروجی‌هایی ناکمتر از ورودی‌ها و خروجی‌های واحد تحت ارزیابی باشد. بنابراین از کارایی به مراتب بیش‌تری نیز برخوردار خواهد بود. دوم در ترکیب محدب نقاط تصویر به دست آمده از مدل‌های هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله قرار گیرد که این نقطه تصویر می‌تواند به‌طور همزمان سه هدف کمینه هزینه، بیشینه درآمد و کمینه فاصله را تا حد ممکن برآورده کند. این مدل تحت بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر فرمول‌بندی شده است.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad d_{\lambda} + d_{\nu} + d_{\tau} \\ \text{St:} \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^C)^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^C)^2} = d_{\lambda}, j=1, 2, \dots, n \quad (1-6) \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^R)^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^R)^2} = d_{\nu}, j=1, 2, \dots, n \quad (2-6) \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^{CL})^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^{CL})^2} = d_{\tau}, j=1, 2, \dots, n \quad (3-6) \quad (6) \\ & \lambda_{\lambda} x_{ip}^C + \lambda_{\nu} x_{ip}^R + \lambda_{\tau} x_{ip}^{CL} = \bar{x}_i \quad i=1, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n \quad (4-6) \\ & \lambda_{\lambda} y_{rp}^C + \lambda_{\nu} y_{rp}^R + \lambda_{\tau} y_{rp}^{CL} = \bar{y}_r \quad r=1, \dots, s \quad j=1, 2, \dots, n \quad (5-6) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bar{x}_i &\leq x_{ip} \quad i=1, \dots, m & (6-6) \\ \bar{y}_r &\geq y_{rp} \quad r=1, \dots, s & (7-6) \\ \sum_{k=1}^r \lambda_k &= 1 & (8-6) \\ d_1 &\geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, \bar{x}_i \geq 0, \bar{y}_r \geq 0, \lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

از آنجایی که نقطه تصویر به دست آمده مدل (۶) در ترکیب محدب نقاط تصویر هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله جای دارد و هر یک از این نقاط تصویر نیز غالب بر واحد تحت ارزیابی‌شان می‌باشند، پس هر ترکیب محدب از این نقاط تصویر نیز غالب بر واحد تحت ارزیابی‌شان خواهد بود. از این رو ورودی‌های نقطه تصویر به دست آمده از مدل پیشنهادی، ناپیش‌تر از ورودی‌های واحد تحت ارزیابی‌اش خواهد بود. همچنین خروجی‌های این نقطه تصویر نیز ناکم‌تر از خروجی‌های واحد تحت ارزیابی‌اش می‌شود؛ بنابراین قیدهای (۶-۶) و (۶-۷) زائد می‌باشند و می‌توان این دو قید را حذف نمود و مدل را به‌گونه زیر ارائه کرد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & d_1 + d_2 + d_3 \\ \text{St:} \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^C)^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^C)^2} = d_1 \quad j=1, 2, \dots, n \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^R)^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^R)^2} = d_2 \quad j=1, 2, \dots, n \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x_{ip}^{CT})^2 + \sum_{r=1}^s (\bar{y}_r - y_{rp}^{CT})^2} = d_3 \quad j=1, 2, \dots, n \quad (7) \\ & \lambda_1 x_{ip}^C + \lambda_2 x_{ip}^R + \lambda_3 x_{ip}^{CT} = \bar{x}_i \quad i=1, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n \\ & \lambda_1 y_{rp}^C + \lambda_2 y_{rp}^R + \lambda_3 y_{rp}^{CT} = \bar{y}_r \quad r=1, \dots, s \quad j=1, 2, \dots, n \\ & \sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1, d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, \bar{x}_i \geq 0, \bar{y}_r \geq 0, \lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

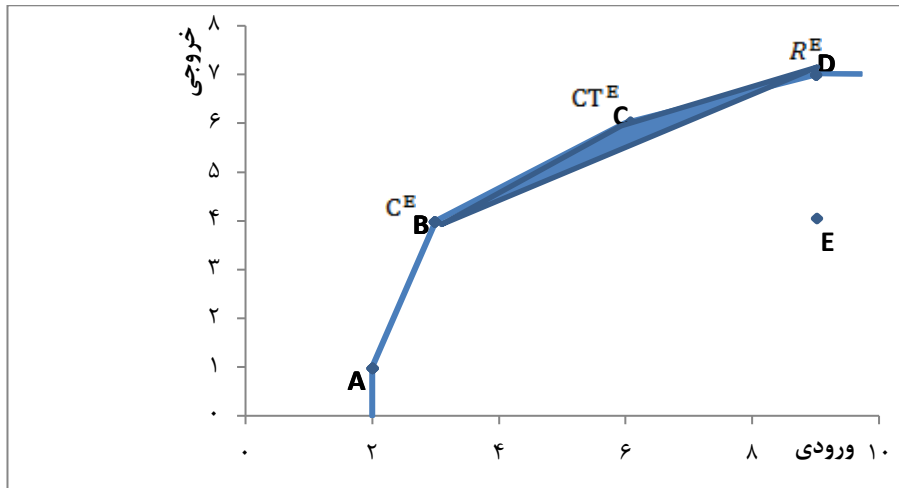
برای به دست آوردن الگوی به دست آمده از مدل پیشنهادی برای هر واحد ناکارآ به‌گونه الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:

گام یکم: نخست نقاط تصویر مدل‌های هزینه، درآمد و نزدیک‌ترین نقطه تصویر را از مدل *ERG* آپارچیو به دست می‌آوریم که به ترتیب با  $(x_{ip}^C, y_{rp}^C)$ ،  $(x_{ip}^R, y_{rp}^R)$  و  $(x_{ip}^{CT}, y_{rp}^{CT})$ ، نامگذاری می‌کنیم.

گام دوم: سپس با به کارگیری از مدل پیشنهادی فاصله نقطه  $(\bar{x}_i, \bar{y}_r)$  را از هر یک از نقاط تصویر مدل‌های هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله که به ترتیب با  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  معرفی کرده‌ایم، تحت نرم دو در تابع هدف مدل به کمینه می‌رسانیم؛ به طوری که این نقطه جدید در پوسته



محدب این نقاط قرار گیرد و در عین حال بر واحد تحت ارزیابی اش غالب گردد. بنابراین الگوی به‌دست آمده برای هر واحد ناکارآ، شدنی و همچنین نسبت به واحد تحت ارزیابی اش از کارایی بیش‌تری برخوردار خواهد بود.



شکل ۱: مجموعه امکان تولید در حالت یک ورودی و یک خروجی

شکل ۱ مجموعه امکان تولید در حالت یک ورودی و یک خروجی را نشان می‌دهد. مرز قطعه قطعه خطی شامل پاره خط واصل A, B, C, D و مرز کارایی تکنیکی را تشکیل می‌دهد و واحد E در آن ناکارآ است. فرض کنید برای واحد E نقاط تصویر هزینه  $(C^E)$ ، درآمد  $(R^E)$  و نزدیک-ترین  $(CT^E)$  به ترتیب واحدهای B, D و C به‌دست آید؛ بنابراین الگوی ایده‌آل به دست آمده از مدل پیشنهادی در ترکیب محدب نقاط تصویر مدل‌های هزینه، درآمد و کوتاه‌ترین فاصله قرار می‌گیرد که به شکل مثلث BCD نشان داده شده است. با توجه به شکل بالا روشن است که الگوی ایده‌آل به‌دست آمده غالب بر واحد تحت ارزیابی E می‌باشد. به عبارت دیگر، دارای ورودی‌های نابیش‌تر و خروجی ناکم‌تر از واحد ناکارآی E خواهد بود. بنابراین از کارایی بیش-تری برخوردار است و به‌طور طبیعی به مرز کارآ نزدیک‌تر خواهد بود.

قضیه ۱: کارایی DMU جدید از کارایی DMU تحت ارزیابی اش بیشتر است.

کارایی هر واحد از فرمول  $Efficiency = \frac{y}{x}$  به‌دست می‌آید. طبق این تعریف، کارایی هر واحد برابر با نسبت خروجی‌ها به ورودی‌های آن واحد می‌باشد و از آن جایی‌که در مدل پیشنهادی



محدودیت‌هایی مبنی بر این‌که نقطه به‌دست آمده برای هر واحد ناکاراً از این مدل بر DMU تحت ارزیابی آن واحد غالب است ( $\bar{y}_r \geq y_{rp} \bar{x}_i \leq x_{ip}$ )، یعنی ورودی‌های نابیش‌تر و خروجی‌های ناکم‌تر از واحد تحت ارزیابی‌اش دارد و از طرفی هم نقطه تصویر به‌دست آمده از مدل پیشنهادی در ترکیب محدب نقاط تصویر هزینه، درآمد و نزدیک‌ترین نقطه تصویر جای دارد. بنابراین روشن است که کارایی این واحد جدید بیشتر از کارایی واحد تحت ارزیابی‌اش خواهد بود.

#### ۴. مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال ساده، نقاط تصویر به دست آمده از مدل‌های هزینه، درآمد و نزدیک‌ترین هدف از مدل ERG آپارچو به همراه الگوی ایده‌آل به‌دست آمده از مدل پیشنهادی برای هر واحد را نشان می‌دهیم. سپس در جدول جداگانه‌ای، هزینه و درآمد مشاهده شده را با هزینه و درآمد ایده‌آل هر DMU مقایسه می‌کنیم. هر واحد تصمیم‌گیری شامل دو ورودی و دو خروجی در نظر گرفته شده است که اطلاعات مربوط به آن‌ها در جدول ۳ نشان داده شده است. اندازه کارایی مدل‌های هزینه، درآمد و نزدیک‌ترین نقطه تصویر از مدل ERG آپارچو به ترتیب در ستون‌های شش، هفت و هشت جدول ۳ آورده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده از این جدول، ۶ واحد (واحدهای ۱، ۳، ۷، ۹، ۱۰ و ۱۳) کارایی تکنیکی هستند. ۵ واحد (واحدهای ۱، ۳، ۷، ۱۰ و ۱۳) کارایی هزینه و ۴ واحد (واحدهای ۱، ۳، ۱۰ و ۱۳) کارایی درآمد می‌باشند. همچنین ۴ واحد (واحدهای ۱، ۳، ۱۰ و ۱۳) در هر سه مدل، هزینه، درآمد و مدل ERG آپارچو، کارا هستند.

جدول ۳: داده‌ها و اندازه کارایی مدل‌های هزینه، درآمد و ERG

واحدها	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	اندازه کارایی هزینه	اندازه کارایی درآمد	اندازه کارایی ERG
DMU۱	۴	۲	۳	۱	۱	۱	۱
DMU۲	۷	۳	۷	۲	۰/۶۵۹	۱/۵۵۶	۰/۳
DMU۳	۸	۱	۸	۸	۱	۱	۱
DMU۴	۴	۳	۶	۳	۰/۸۶۲	۱/۶۰۸	۰/۵۵
DMU۵	۲	۴	۲	۳	۰/۸۵۷	۳/۸۵۲	۰/۲۴
DMU۶	۱۰	۲	۵	۲	۰/۵۹۵	۲/۰۳۹	۰/۲۳
DMU۷	۳	۷	۳	۱۰	۱	۱/۸۶۰	۱



واحدها	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	اندازه کارآیی هزینه	اندازه کارآیی درآمد	اندازه کارآیی ERG
DMU <sub>۸</sub>	۶	۶	۴	۶	۰/۵۲۴	۲/۰۷۴	۰/۳۶
DMU <sub>۹</sub>	۱۲	۱	۱۰	۱	۰/۶۴۲	۱/۰۳۲	۱
DMU <sub>۱۰</sub>	۱۰	۴	۱۲	۴	۱	۱	۱
DMU <sub>۱۱</sub>	۵	۳	۷	۶	۰/۸۵۸	۱/۲۷۶	۰/۷۶
DMU <sub>۱۲</sub>	۲	۶	۱	۵	۰/۶۵۳	۴/۳۳۳	۰/۱۴
DMU <sub>۱۳</sub>	۱	۴	۱۰	۴	۱	۱	۱

در جدول ۴، تصاویر به‌دست آمده از مدل‌های هزینه، درآمد و مدل نزدیکترین هدف به ترتیب در ستون‌های دوم، سوم و چهارم ارائه شده است. آخرین ستون از جدول ۴، الگوی ایده‌آل به‌دست آمده از مدل پیشنهادی را برای هر واحد نشان می‌دهد. نقطه تصویر به‌دست آمده برای ۸ واحد (واحدهای ۲، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۱ و ۱۲) متفاوت از نقاط تصویر مدل‌های هزینه، درآمد و نزدیکترین هدف است.

جدول ۴: نقاط تصویر به‌دست آمده از مدل‌های مختلف

واحدها	تصویر مدل هزینه	تصویر مدل درآمد	تصویر مدل نزدیکترین هدف (ERG)	الگوی ایده‌آل مدل پیشنهادی
DMU <sub>۱</sub>	(۴، ۲، ۳، ۱)	(۴، ۲، ۳، ۱)	(۴، ۲، ۳، ۱)	(۴، ۲، ۳، ۱)
DMU <sub>۲</sub>	(۲/۲۹، ۳/۱۴، ۷، ۲/۷۱)	(۷، ۳، ۱۰/۱۵، ۵/۳۳)	(۷، ۱/۴۳، ۸/۲۹، ۷/۴۳)	(۶/۳۸، ۲/۵۴، ۹/۱۷، ۵/۶۲)
DMU <sub>۳</sub>	(۸، ۱، ۸، ۸)	(۸، ۱، ۸، ۸)	(۸، ۱، ۸، ۸)	(۸، ۱، ۸، ۸)
DMU <sub>۴</sub>	(۳/۶۲، ۲/۵، ۶، ۳)	(۴، ۳، ۹/۴۸، ۵/۳۳)	(۳/۳۳، ۳، ۹/۳۳، ۵/۳۳)	(۳/۵۷، ۲/۹۸، ۹/۲۴، ۵/۳۳)
DMU <sub>۵</sub>	(۵/۱۴، ۱/۷۱، ۴/۴۳، ۳)	(۲، ۴، ۱۰/۲۲، ۴)	(۱، ۴، ۱۰، ۴)	(۱/۸۶، ۳/۹۳، ۱۰، ۳/۹۷)
DMU <sub>۶</sub>	(۳/۳۲، ۲/۵، ۵، ۲)	(۸/۶۷، ۲، ۹/۳۳، ۶/۶۷)	(۸، ۱، ۸، ۸)	(۷/۹۴، ۱/۵۷، ۸/۳۷، ۶/۹۲)
DMU <sub>۷</sub>	(۳، ۷، ۳، ۱۰)	(۳، ۴، ۱۰/۴۴، ۴)	(۳، ۷، ۳، ۱۰)	(۳، ۷، ۳، ۱۰)
DMU <sub>۸</sub>	(۶/۸۶، ۱/۲۹، ۶/۵۷، ۶)	(۶، ۴، ۱۱/۱۱، ۴)	(۴/۵، ۲/۵، ۹، ۶)	(۴/۹۷، ۲/۵۴، ۸/۹۶، ۵/۷۶)
DMU <sub>۹</sub>	(۱، ۴، ۱۰، ۴)	(۸، ۱، ۸، ۸)	(۱۲، ۱، ۱۰، ۱)	(۷/۴۲، ۱/۶۵، ۸/۹۱، ۵/۴۸)



واحدها	تصویر مدل هزینه	تصویر مدل درآمد	تصویر مدل نزدیک‌ترین هدف (ERG)	الگوی ایده‌آل مدل پیشنهادی
DMU ۱۰	(۱۰, ۴, ۱۲, ۴)	(۱۰, ۴, ۱۲, ۴)	(۱۰, ۴, ۱۲, ۴)	(۱۰, ۴, ۱۲, ۴)
DMU ۱۱	(۶/۴۴, ۱/۵, ۷, ۶)	(۵, ۳, ۹/۷, ۵/۳۳)	(۴/۵, ۲/۵, ۹, ۶)	(۴/۷۲, ۲/۵۲, ۸/۹۹, ۵/۸۸)
DMU ۱۲	(۶/۲۹, ۱/۴۳, ۵/۸۶, ۵)	(۲, ۴, ۱۰/۲۲, ۴)	(۱/۳۳, ۴/۵, ۸/۸۳, ۵)	(۲/۰۱, ۴/۰۴, ۹/۱۵, ۴/۶)
DMU ۱۳	(۱, ۴, ۱۰, ۴)	(۱, ۴, ۱۰, ۴)	(۱, ۴, ۱۰, ۴)	(۱, ۴, ۱۰, ۴)

در جدول ۵، هزینه و درآمد ایده‌آل برای هر واحد با هزینه و درآمد مشاهده شده‌اش مقایسه می‌شود. زمانی بهبود عملکرد یک واحد را مشاهده می‌کنیم که مجموع هزینه‌های آن کاهش و مجموع درآمد نظیر آن واحد افزایش یافته باشد. نتایج به‌دست آمده در این جدول نشان می‌دهد که برای تمامی واحدها، هزینه ایده‌آل بیش‌تر از هزینه مشاهده شده‌اش و درآمد ایده‌آل کم‌تر از درآمد مشاهده شده نظیر هر واحد به دست نیامده است که نشان دهنده بهبود عملکرد تمامی واحدها می‌باشد. به عنوان مثال، واحد ۸ را در نظر بگیرید. با وجود اینکه در مدل پیشنهادی خروجی دوم واحد ۸ کاهش داشته است ولی درآمد ایده‌آل این واحد بیشتر از درآمد مشاهده شده‌اش به‌دست آمده است. حال، واحد ۹ را در نظر بگیرید. برای این واحد با وجود افزایش در دومین ورودی مدل پیشنهادی، هزینه ایده‌آل آن کم‌تر از هزینه مشاهده شده‌اش به‌دست آمده است. قیمت ورودی‌ها و خروجی‌ها برای همه واحدها، مقادیر ثابتی فرض شده است که به‌گونه  $(c_1 = 1, c_2 = 2, p_1 = 3, p_2 = 1)$  مقداردهی می‌شود.

هزینه ایده‌آل و درآمد ایده‌آل از فرمول زیر به‌دست می‌آید به‌طوری که  $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$  نقطه تصویر به‌دست آمده از مدل پیشنهادی برای هر واحد می‌باشد.

$$c_1 x_1^* + c_2 x_2^* \text{ هزینه ایده‌آل}$$

$$p_1 y_1^* + p_2 y_2^* \text{ درآمد ایده‌آل}$$

نتایج در جدول ۵ قابل مشاهده است.



جدول ۵: مقایسه بین هزینه و درآمد ایده‌آل با هزینه و درآمد مشاهده شده

واحدها	هزینه مشاهده شده	هزینه ایده‌آل	درآمد مشاهده شده	درآمد ایده‌آل
۱	۸	۸	۱۰	۱۰
۲	۱۳	۱۱/۴۶	۲۳	۳۳/۱۳
۳	۱۰	۱۰	۳۲	۳۲
۴	۱۰	۹/۵۳	۲۱	۳۲/۹۵
۵	۱۰	۹/۷۲	۹	۳۳/۹۷
۶	۱۴	۱۱/۸	۱۷	۳۲/۰۶
۷	۱۷	۱۷	۱۹	۱۹
۸	۱۸	۱۰/۰۵	۱۸	۳۲/۶۴
۹	۱۴	۱۰/۷۲	۳۱	۳۲/۲۱
۱۰	۱۸	۱۸	۴۰	۴۰
۱۱	۱۱	۹/۷۶	۲۷	۳۲/۸۵
۱۲	۱۴	۱۰/۰۹	۸	۳۲/۰۵
۱۳	۹	۹	۳۴	۳۴

## ۵. نتیجه‌گیری

در تحلیل پوششی داده‌ها، یک واحد ناکارآ برای بهبود عملکرد خود و کارآ شدن می‌تواند با کم کردن ورودی‌ها یا افزودن خروجی‌ها و یا به‌طور همزمان با کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌هایش به نقطه ایده‌آل برسد. نقطه ایده‌آل به‌دست آمده، به‌عنوان یک الگو برای آن واحد ناکارآ محسوب می‌شود. بنابراین تعیین یک الگوی مناسب می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد. در این مقاله روشی شامل دو گام ارائه شده است که در گام اول توسط مدل‌های کارآیی هزینه، درآمد و مدل ERG آپارچیو، نقاط تصویر نظیر هر واحد را مشخص کرده سپس برای هر واحد، الگویی ایده‌آل از طریق مدل پیشنهادی به‌دست می‌آید که فاصله آن از هر یک از نقاط تصویر به‌دست آمده در گام اول تحت نرم دو کم‌ترین باشد. اگرچه برای این الگو لزوماً تضمینی وجود ندارد که روی مرز کارآ قرار گیرد ولی کارآیی آن بیشتر از کارآیی واحد تحت ارزیابی‌اش خواهد بود و ارزشمندتر از همه آن که به‌طور همزمان سه هدف کم‌ترین هزینه، بیش‌ترین درآمد و کوتاه‌ترین فاصله را تا حد امکان برآورده می‌کند که به‌دست آوردن چنین الگویی برای هر واحد ناکارآ می‌تواند از اهمیت بالایی برخوردار باشد. مدل، بر روی ۲۹ شرکت ملی گاز ایران پیاده‌سازی شد و نتایج بدست آمده از مدل پیشنهادی ارائه شد. همچنین مقایسه





بین کارآیی هزینه و درآمد ایده‌آل با کارآیی هزینه و درآمد دیده شده نشان داده شد که در آن هزینه ایده‌آل هر واحد کمتر یا مساوی هزینه دیده شده‌اش و درآمد ایده‌آل هر واحد نیز بزرگ‌تر یا مساوی درآمد دیده شده آن واحد، به دست آمد.

## ۶. پیشنهادات:

- مجموعه فازی به دلیل داشتن دو شاخص درجه عضویت و عدم عضویت می‌تواند فضای خوبی برای تصمیم‌گیری ایجاد کند در شرایط عدم اطمینان در شرایط حاکم بر بازار هدف و همچنین در نظر گرفتن گرایش‌ها و ترجیحات مختلف سرمایه‌گذاران (به‌عنوان یک مدلی برای پیاده کردن مسئله فوق) می‌توان از مجموعه اعداد فازی شهودی بازه‌ای استفاده شود. [۱]
- رفتارها در شرایط عدم اطمینان بنگاه‌های اقتصادی در نتیجه برخی فعالیت‌های جهانی‌سازی، افزایش در سطوح برون‌سپاری، کاهش تعداد تأمین‌کنندگان، کاهش چرخه محصول، افزایش نوسانات تقاضا و کاهش فزاینده موجودی این حقیقت را روشن می‌سازد که شرکت‌ها به دنبال مدلی برای افزایش سودآوری و نزدیک‌تر کردن خود به مشتریان می‌باشد [۳و۴]. لذا به پژوهشگران توصیه می‌شود با استفاده از تکنیک‌های پیش‌بینی (رگرسیون و سری‌های زمانی و ...) رفتار مدل فوق را پیش‌بینی نموده تا با کاهش خطا و افزایش قدرت تشخیص میزان قدرت تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران را افزایش دهند.
- بعضی اوقات در بررسی یک مدل خواسته یا ناخواسته برخی از داده‌ها گم‌شده یا فراموش می‌شوند. با توجه به این نکته فصیحی و همکاران رویکردی برای اندازه‌گیری کارایی ارائه کردند (به‌عنوان تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های گم‌شده) تا رویکرد DEA را تقویت کند از کارهای تحقیقاتی آینده این است که آیا می‌توان این رویکرد را بسط داد تا DEA نادقیق را نیز در برگیرد [۵و۶].
- ارزیابی همزمان از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه هم وجود دارد. [۷و۸] لذا به پژوهشگران توصیه می‌شود تا از تلفیق مقاله فوق و رویکرد تحلیل پوششی داده‌های گم‌شده به‌منظور کاهش خطاهای ناخواسته استفاده نمایند.



**محدودیت‌های تحقیق:** داده‌های ارائه شده در بخش مثال کاربردی مربوط به سال ۱۳۹۴ می‌باشد. تلاش زیادی صورت گرفت تا تکنیک معرفی شده را روی داده‌های واقعی و جدید در بخش صنعت پیاده کنیم اما هرچه تلاش شد هیچ یک از بخش‌های صنعت حاضر به همکاری نشدند و علی‌رغم اصرار نویسندگان بر اجرا روی داده‌های واقعی حسب پیشنهاد داوران محترم به یک مثال ساده بسنده شد.

### ۷. پی‌نوشت‌ها

- |                                              |                              |
|----------------------------------------------|------------------------------|
| ۱. Debru                                     | ۱۳. Kusmanen                 |
| ۲. Farrell                                   | ۱۴. Post                     |
| ۳. Charnes                                   | ۱۵. Sheng                    |
| ۴. Cooper                                    | ۱۶. Hung                     |
| ۵. Rhodes                                    | ۱۷. Aparicio                 |
| ۶. Benker                                    | ۱۸. Euclidean Distance-Based |
| ۷. Fare                                      | measure of efficiency        |
| ۸. Lovell                                    | ۱۹. Chen                     |
| ۹. Pastor                                    | ۲۰. Zhu                      |
| ۱۰. Russell                                  | ۲۱. Ruiz                     |
| ۱۱. Tone                                     | ۲۲. Enhance Russell Graph    |
| ۱۲. Slacks-Based Measure of Efficiency Model |                              |

### ۸. منابع

- [۱] Debreu, G. The Coefficient of Resource Utilization, Journal of the Econometric Society, ۱۹, ۱۹۵۱, ۲۷۳-۲۹۲.
- [۲] Farrell, M.J. The measurement of productive efficiency, Journal of the Royal Statistical Society, ۱۲۰, ۱۹۵۷, ۲۵۳- ۲۸۱.
- [۳] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, ۲, ۱۹۷۸, ۴۲۹-۴۴۴.
- [۴] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science, ۳۰, ۱۹۴۸, ۱۰۷۸-۱۰۹۲.
- [۵] Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J. Foundations of data



- envelopment analysis for Pareto–Koopmans efficient empirical production functions, *Journal of Econometrics*, ۳۰, ۱۹۸۵, ۹۱–۱۰۷.
- [۶] Fare, R., Lovell, C. A. K. Measuring the technical efficiency of production, *Journal of Economic Theory*, ۱۹, ۱۹۷۸, ۱۵۰–۱۶۲.
- [۷] Pastor, J.T., Ruiz, J. L., Sirvent, I. An enhanced Russell graph efficiency measure, *European Journal of Operational Research*, ۱۱۵, ۱۹۹۹, ۵۹۶–۶۰۷.
- [۸] Tone, K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, ۱۳۰, ۲۰۰۱, ۴۹۸–۵۰۹.
- [۹] Fare, R., Grosskopf, S, Lovell, C.A.K. The measurement of efficiency of production, Dordrecht MA: Kluwer Academic Publisher. ۱۹۸۵.
- [۱۰] Tone, K. A Strange case of the cost and allocative efficiencies in DEA, *Journal of Operational Research Society*, ۵۳, ۲۰۰۲, ۱۲۲۵–۱۲۳۱.
- [۱۱] Kuosmanen, T., Post T. Measuring economic efficiency with incomplete price information: With an application to European commercial banks, *European Journal of Operational Research*, ۱۳۴, ۲۰۰۱, ۴۳–۵۸.
- [۱۲] Kuosmanen, T., Post T. Measuring economic efficiency with incomplete price information, *European Journal of Operational Research*, ۱۴۴, ۲۰۰۳, ۴۵۴–۴۵۷.
- [۱۳] Jahanshahloo, G. R., Mehdiloozad, M. & Roshdi, I. Directional closest-target based measures of efficiency: Holder norms approach, *International Journal of Industrial Mathematics*, ۵, ۲۰۱۳, ۳۱–۳۹.
- [۱۴] Sheng Ang, Qingxian An, Feng Yang, & Xiang Ji. Target setting with minimum improving costs in data envelopment analysis: A mixed integer linear programming approach, *Journal of Wiley Expert Systems*, ۳۶, ۲۰۱۹, ۱–۱۴.
- [۱۵] Hung-Tso Lin. An efficiency-driven approach for setting revenue target, *Journal of Decision Support Systems*, ۴۹, ۲۰۱۰, ۳۱۱–۳۱۷.
- [۱۶] Aparicio, J., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA, *Journal of Productivity Analysis*, ۲۸, ۲۰۰۷, ۲۰۹–۲۱۸.



- [۱۷] Amirteimoori, A., Kordrostami, S. A Euclidean distance-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *Optimization*, ۵۹, ۲۰۱۰, ۹۸۵-۹۹۶.
- [۱۸] Aparicio, J., & Pastor, J. T. On how to properly calculate the Euclidean distance-based measure in DEA, *Optimization*, ۶۳, ۲۰۱۴, ۴۲۱-۴۳۲.
- [۱۹] An, Q., Pang, Z., Chen, H., & Liang, L. Closest targets in environmental efficiency evaluation based enhanced Russell measure, *Ecological Indicators*, ۵۱, ۲۰۱۵, ۵۹-۶۶.
- [۲۰] Moradi, A., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Vaezghasemi, M. Closest reference point on the strong efficient frontier in data envelopment analysis, *Journal Math*, ۵, ۲۰۱۹, ۸۱۱-۸۲۷.
- [۲۱] Zhu, Q., Wu, J., Ji, X., Li, F. A simple MILP to determine closest targets in non-oriented DEA model satisfying strong monotonicity, *Omega*, ۷۹, ۲۰۱۷, ۱-۸.
- [۲۲] Ruiz, J.L., Sirvent, L. Performance evaluation through DEA benchmarking adjusted to goals, *The International Journal of Management Science*, ۸۴, ۲۰۱۸, ۱۵۰-۱۵۷.
- [۲۳] Goharbani Z., Tavakoli R., Vahdani B., Minai M., Mosavi M. "Solving a network analysis process models to choose laws dispatcher using intuitive fuzzy set interval", *Management studies in Iran*, ۲, ۲۰۱۴, ۱۹۵-۲۱۳.
- [۲۴] Ebrahimi S A., Fiz D., Ghitkaran H. Comprehensive analysis of factors affecting the organizational resilience of SMEs, *Management Research in Iran*, ۷(۳), ۲۰۱۷, ۳۷-۵۸.
- [۲۵] Rahimian M., Rajabzadeh Ghatari A. Measuring Supply Chain Resilience using complex Adaptive Systems approach, Case study: Iranian Pharmaceutical Industry, *Modern Researches in Decision Making*, ۲(۲), ۲۰۱۷, ۱۵۵-۱۹۵.
- [۲۶] Azizi H., Amirteimoori A., Kordrostami S. Measurement of the worst practice of decision-making units: Incorporating both undesirable outputs and non-discretionary inputs into imprecise DEA, *Modern Researches in Decision Making*, ۳(۲), ۲۰۱۸, ۱۹۷-۲۲۲.



- [۲۷] Azizi H., Amirteimoori A., Kordrostami S. A data envelopment analysis approach with efficient and inefficient frontiers for supplier selection in the presence of both undesirable outputs and imprecise data, *Modern Researches in Decision Making*, ۱(۲), ۲۰۱۶, ۱۳۹-۱۷۰.
- [۲۸] Azizi H. Efficiency assessment in data envelopment analysis using efficient and inefficient frontiers, *Management Research in Iran*, ۱۶(۳), ۲۰۱۲, ۱۵۳-۱۷۳.
- [۲۹] Azizi H., Jahed R. Supplier Selection in Volume Discount Environments in the Presence of Both Cardinal and Ordinal Data: A New Approach Based On Double Frontiers DEA, *Management Research in Iran*, ۱۹(۳), ۲۰۱۵, ۱۹۱-۲۱۷.