پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره ۷، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صص ۲۹-۵۱
نوع مقاله: پژوهشی

تخمین کارایی فرایندهای دومرحله‌ای با استفاده از مدل اندازه دامنه تنظیم شده کاملاً فازی و شرایط مکمل زاید قوی

سیدمحمدفخرموسوی [۱]، علیرضا امیرتیموری [۲]، سهراب کردرستمی [۳*]، محسن واعظ قاسمی [۴]

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
۲- استاد، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
۳- استاد، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
۴- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۵

چکیده:
در دهه‌های اخیر، موضوع ارزیابی عملکرد، یکی از موضوعات مورد علاقه شرکت‌ها و مدیران کارخانجات بزرگ بوده است. مدل اندازه دامنه تنظیم شده (RAM) در تحلیل پوششی داده‌ها، یک مدل غیرشعاعی است که برای ارزیابی عملکرد واحدها استفاده می‌شود. با توجه به حضور شاخص‌های نادقیق در بسیاری از بررسی‌ها، در این مقاله یک مدل اندازه دامنه تنظیم شده کاملاً فازی با شرایط مکمل زائد قوی را برای یافتن سیستم‌های دومرحله‌ای کارا در یک مجموعه مرجع ارائه داده و آن را در ارزیابی خطوط هوایی به کار می‌بریم. با توجه به اینکه یک مدل شبکه چند هدفه اندازه دامنه تنظیم شده کاملاً فازی با شرایط مکمل زائد قوی داریم، در نتیجه با استفاده از روش لکزیکوگراف، مدل پیشنهادی را ارائه می‌نمائیم. همچنین آن را با مدل اندازه دامنه تنظیم‌شده در شبکه پایه‌ای مقایسه می‌کنیم. در انتها مدل را با استفاده از داده‌های چهارده ایرلاین ایرانی پیاده‌سازی می‌نمائیم.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تصمیم‌گیری، مدل اندازه دامنه تنظیم شده، فازی، شبکه دو مرحله‌ای

---

* نویسنده مسئول E-mail: sohrabkordrostami@gmail.com

۱- مقدمه

امروزه تحلیل پوششی داده‌ها که توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) [۱] ارائه گردید، برای ارزیابی کارآیی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) استفاده می‌شود. این روش برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیری با چندین ورودی و خروجی در صنایع و رشته‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. تکنیک DEA، از مشاهدات ورودی و خروجی برای ایجاد یک مجموعه امکان تولید آزمایشی استفاده می‌کند که این نقاط، مرز تجربی را تشکیل می‌دهند. تمام نقاط موجود بر روی این مرز، کارا و بقیه آن‌ها ناکارا هستند. در مدل‌های معمول استفاده شده در DEA، هر DMU به‌عنوان یک جعبه سیاه در نظر گرفته شده است که از تعدادی ورودی و خروجی تولید می‌شود. نکته مهم در این مدل‌ها این است که ساختار داخلی آن‌ها نادیده گرفته می‌شود. همچنین تحقیقات نشان داد که رویکرد فازی مدل اندازه‌گیری محدوده تنظیم شده (RAM) می‌تواند مجموعه‌های مرجع را برای سیستم‌های کلی و هر مرحله شناسایی کند. در نتیجه در ادامه با استفاده از مدل اندازه‌گیری محدوده تنظیم‌شده به محاسبه مجموعه مرجع برای حالت کلی و هر مرحله می‌پردازیم. در بخش‌های بعدی به ارائه مثال و نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات خواهیم پرداخت.

۲-پیشینه تحقیق

در مطالعات اخیر مدل‌هایی برای ارزیابی کارایی واحدها با ساختارهای مختلف شبکه معرفی شده است. به‌عنوان نمونه می‌توان به مدل تجزیه‌وتحلیل تأثیر متغیرهای طبقه‌بندی محیطی بر کارایی DEA، روجرو (۱۹۹۸) [۲] اشاره کرد. سیفورد و ژو (۱۹۹۹) [۳] از روش‌های دو مرحله‌ای برای اندازه‌گیری سودآوری و بازاریابی در بانک‌های تجاری ایالات متحده استفاده نمودند. لوییز و سکستون (۲۰۰۴) [۴] از DMU ها، برای تولید *شبکه‌ای شامل* زیر DMU ها استفاده نمودند، که در آن بعضی از منابع تولید شده، سایر زیر DMU ها را مصرف می‌کنند و برخی منابع مصرف شده، DMU های دیگر را تولید می‌کنند. یو و لین (۲۰۰۸) [۵] یک مدل چند حالته در DEA ارائه نمودند که شبکه آن هم در تولید و هم در فناوری‌های مصرفی، در یک چارچوب یکپارچه نمایانگر بوده است. همایون فر و امیرتیموری (۲۰۱۵) [۶] رویکردی مبتنی بر DEA شبکه‌ای فازی برای هدف‌گذاری در یک محیط تصمیم‌گیری متمرکز با شرط غیرقطعی بودن تقاضا ارائه نمودند که خروجی‌های مطلوب و غیرمطلوب را مورد توجه قرار می‌دهد. علاوه بر این، کائو و هوانگ (۲۰۰۸) [۷] تجزیه‌وتحلیل عملکرد دو مرحله‌ای DEA را نمایش دادند که مربوط به کارایی شرکت‌های ارائه‌دهنده بیمه، غیر از بیمه عمر در تایوان بود. این تجزیه‌وتحلیل DEA با روند

کسب حق بیمه و تولید سود مرتبط است. تون و سوتسی (۲۰۰۹) [۸] یک مدل شبکه‌ای DEA مبتنی بر کمبود، به نام شبکه SBM ارائه دادند که می‌تواند به‌طور واقعی با محصولات میانی در ارتباط باشد. رویکرد دیگر توسط کائو و هوانگ (۲۰۱۰) [۹] پیشنهاد شده است که به دو زیر فناوری برای ایجاد مرز در شبکه مستقل نیاز دارد. امیرتیموری و کردرستمی (۲۰۱۲) [۱۰] مطالعات قبلی در رابطه با برنامه‌ریزی تولید مبتنی بر DEA در محیط تصمیم گیری متمرکز را توسعه دادند. امید و همکاران (۲۰۱۰) [۱۱] پژوهشی انجام دادند که با حداقل‌سازی فاصله از کارایی مستقل، سعی در بهینه‌سازی مدل چندهدفه با استفاده از رویکردی خطی دارد. به‌طوری که مقایسه نتایج عددی نشانگر برتری این مدل نسبت به مدل‌های موجود، دستیابی به مجموعه جواب پارتو است. زندیه و سالاری (۲۰۱۶) [۱۲] مدلی ارائه نمودند که با استفاده از فرآیند خدمت‌دهی فروشگاه‌های اینترنتی به دو مرحله عرضه‌پذیری و سودآوری تقسیم شود. در نتیجه برای محاسبه کارایی از یک مدل دو مرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شد. سوشی وسکیتانی (۲۰۰۷) [۱۳]، با استفاده از یک مدل غیرشعاعی تحلیل پوششی داده‌ها، به بررسی اندازه‌گیری برای نشان‌دادن مدل اندازه‌گیری محدوده تنظیم شده (RAM)، از مدل‌های غیر شعاعی بر اساس شرایط مکمل زائد قوی (SCSC) استفاده کردند. این روش مقدار بازده به مقیاس را در اندازه‌گیری محدوده تنظیم شده محاسبه می‌کند. ریووژنکو و همکاران (۲۰۱۴) [۱۴] یک روش مستقیم برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس در مدل‌های غیرشعاعی تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردند. در مطالعه دیگر، ریووژنکو و همکاران (۲۰۱۷) [۱۵] روشی را برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس و مقیاس اقتصادی در نقاط پیش‌بینی در مدل‌های شعاعی تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. در مرحله اول، نقطه داخلی نسبی و تصویر آن نقطه با استفاده از یک روش خاص طراحی شده پیدا می‌شود و در مرحله دوم، بازده به مقیاس نقطه داخلی نسبی یافت‌شده در مرحله اول محاسبه می‌شود. این مقاله با رویکرد برنامه‌ریزی تولید مبتنی بر DEA، محیط تصمیم‌گیری متمرکز را توسعه داد. فخرموسوی و همکاران (۲۰۲۱) [۱۶] یک رویکرد جدید غیرشعاعی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای تجزیه‌وتحلیل عملکرد و بررسی RTS و SE در فرایندهای دو مرحله‌ای ارائه کردند. یوآن (۲۰۱۲) [۱۷] یک روش بهینه‌سازی فازی دو مرحله‌ای برای مسئله برنامه‌ریزی تولید ارائه نمود که یک نگرش جدید را با توجه به روش تجزیه‌وتحلیل مسائل چند محصوله‌ی-چنددوره‌ای فراهم کرده است. خالدیان و مؤمنی (۲۰۲۲) [۱۸] مدل تسطیح منابع چند هدفه به صورت فازی-تصادفی ارائه نمودند برای حل آن الگوریتم NSGA-II توسعه داده شد. شکوری گنجوی و کاظمی (۲۰۱۸) [۱۹] پژوهشی انجام دادند که با در نظر گرفتن ترجیحات

مصرف‌کننده و تعرفه قیمت انرژی الکتریکی، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای بهینه‌سازی مصرف انرژی برق بیمارستان‌ها ارائه شد. سلطان‌زاده و عمرانی (۲۰۱۸) [۲۰] و در ادامه آن حیدری و همکاران (۲۰۲۰) [۲۱] یک مدل شبکه فازی DEA-RAM برای ارزیابی خطوط هوایی ارائه کردند و مدل DEA-RAM شبکه را در چارچوب کاملاً فازی گسترش دادند.

۳-تعریف مسئله

در دنیای واقعی، داده‌ها در بسیاری از موارد به دلیل پیچیدگی سیستم، غیرقطعی هستند. برخی از مرزهای کارا در DEA نسبت به عدم قطعیت داده‌ها حساس هستند. داده‌های غیرقطعی می‌تواند مرز کارا را تغییر دهد. رویکرد فازی به‌عنوان یکی از روش‌های مقابله با عدم قطعیت در مدل‌های DEA ارائه شده است. در مدل‌های فازی، نمرات کارایی DMU ها، بازه‌ای از کارایی یا مقادیر کارایی فازی هستند، در مقاله مذکور اندازه واحدهای عملیاتی مورد توجه قرار گرفته و سطح تولید هر یک از واحدها، متناسب با توانایی آنها در نظر گرفته شد. تحقیقات زیادی برای این منظور ارائه شده است. یافته‌ها نشان داد که رویکرد فازی RAM می‌تواند مجموعه‌های مرجع را برای سیستم‌های کلی و هر مرحله شناسایی کند. شرایط مکمل زائد بکار رفته در مدل این امکان را ایجاد می‌کند که کمترین فاصله ممکن را تا مرز کارا برای واحدهای تحت ارزیابی ناکارا به‌دست بیاوریم. در عمل این باعث می‌شود که واحدهای تحت ارزیابی، کمترین مازاد ورودی و کمبود خروجی را داشته باشند. علاوه بر این، نتایج مدل‌ها نشان می‌دهد که واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) طبقه‌بندی می‌شوند. در ادامه به ارائه مدل‌های مربوط به مدل اندازه دامنه تنظیم شده پرداخته و با توجه به چند هدفه بودن مدل موجود، با استفاده از روش لکزیکوگراف آن را به تابع تک هدفه تبدیل می‌نماییم و با ارائه مجموعه‌ای متشکل از ۱۴ واحد از ایرلاین‌های ایرانی، به پیاده‌سازی مدل مربوطه بر روی آن پرداخته و پیشنهادهایی ارائه خواهیم کرد.

٤-مدل اندازه دامنه تنظیم شده در حالت کلی شبکه ساده (RAM)

در مدل‌های استاندارد DEA، زمانی‌که کارایی DMU ها برابر ۱ باشد، اما متغیرهای کمکی آن‌ها صفر نباشند، نمی‌توانند به عنوان کاملاً کارا شناخته شوند. در مقایسه با مدل استاندارد DEA، مدل‌های غیر شعاعی DEA می‌تواند کمبودهای ورودی‌ها و خروجی‌ها را نشان دهد. RAM یک مدل غیرشعاعی است، که توسط آیدا و همکاران (۱۹۹۸) [۲۲] و کوپر و همکاران (۱۹۹۹) [۲۳]

پیشنهاد شد. با توجه به مدل RAM پیشنهادی توسط کوپر و همکاران (۱۹۹۹) [۲۳]، بنکر و همکاران (۲۰۰۴) [۲۴]، فخرموسوی و همکاران (۲۰۲۱) [۱۶] مدل (۱) برای تجزیه‌وتحلیل عملکرد ساختار شبکه ارائه شد. فرض کنید که هر $DMU_j \ (j=1,...,n)$، Kخروجی $z_{kj}(k=1,...,K)$ برای مرحله ۱ دارند که به‌عنوان ورودی مرحله ۲ هستند. علاوه بر این، $x_{ij}(i=1,...,m)$، ورودی‌های اولیه و $y_{rj}(r=1,...,s)$، خروجی‌های نهایی می‌باشند. همچنین $d_i=(d_1,...,d_m)$، $f_r=(f_1,...,f_s)$، $b_k=(b_1,...,b_k)$، $b'_k=(b'_1,...,b'_k)$ بردارهای متغیرهای کمکی می‌باشند. با توجه به اصطلاحاتی که قبلاً ذکر شد، مدل RAM دو مرحله‌ای زیر برای فرایند کلی به منظور یافتنDMU های کارا ارائه شده است.

(۱)

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{m} R_i^x d_i + \sum_{r=1}^{s} R_r^y f_r + \sum_{k=1}^{K} R_k^z b_k + \sum_{k=1}^{K} R_k^z b'_k \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + d_i = x_{io}\,;\ i=1,...,m,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j y_{ij} - f_r = y_{ro}\,; r=1,...,s, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_{kj} - b_k = z_{ko},\ \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j z_{kj} + b'_k = z_{ko}\ ;\ k=1,...,K \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j = 1 \\
&\lambda_j \ge 0, \lambda'_j \ge 0, \forall j,\ d_i \ge 0, \\
&f_r \ge 0, b_k \ge 0, b'_k \ge 0\ \ \forall i, r, k
\end{aligned}
$$

با توجه به مدل معرفی شده توسط سویوشی و گوتو (۲۰۱۱) [۲۵]، سطح کارایی یکپارچه تعیین می‌شود. همان‌طور که می‌بینید، مرحله (۱) و مرحله (۲) با هم ترکیب می‌شوند. به عنوان مثال، $\lambda_j\,(j=1,...,n)$، متغیر وزنی j امین خروجی را برای مرحله (۱) نشان می‌دهد و همچنین $\lambda'_j\,(j=1,...,n)$، متغیر وزنی j امین خروجی برای مرحله (۲) را نیز نشان می‌دهد که متغیرهای کمکی ورودی، به ترتیب d^x برای مرحله (۱) و b'^z برای مرحله (۲) هستند. محدوده‌های مدل یکپارچه ورودی‌ها، خروجی‌ها و دامنه‌های تنظیم اندازه‌گیری میانی می‌باشد که به‌صورت زیر می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد.

$$R_i^x = (m+s)^{-1}(\max\{x_{ij} \mid j=1,\dots,n\} - \min\{x_{ij} \mid j=1,\dots,n\})^{-1}$$
$$R_r^y = (m+s)^{-1}(\max\{y_{rj} \mid j=1,\dots,n\} - \min\{y_{rj} \mid j=1,\dots,n\})^{-1}$$
$$R_k^z = (m+s)^{-1}(\max\{z_{kj} \mid j=1,\dots,n\} - \min\{z_{kj} \mid j=1,\dots,n\})^{-1}$$

۵- مدل اندازه دامنه تنظیم شده فازی (RAM)

مدل RAM یکی از مدل‌های غیرشعاعی DEA در محاسبه کارایی است. در RAM، فرض بر این است که همه پارامترها و متغیرها اعداد قطعی هستند با این حال، در دنیای واقعی، داده‌ها ممکن است قطعیت نداشته باشند که در بسیاری از موارد به دلیل پیچیدگی‌های سیستم است. نظریه فازی یکی از مهمترین رویکردها برای مدل‌سازی و مقابله با عدم اطمینان در داده‌ها می‌باشد. در مطالعات زیادی، اعداد فازی و متغیرهای فازی وجود دارد که برای نشان دادن عدم اطمینان در مدل‌های RAM استفاده شده است. مدل‌های RAM شبکه ارائه شده در این مقاله در بدبینانه‌ترین، محتمل‌ترین و خوش‌بینانه ترین حالت بر اساس مدل‌های DEA در چارچوب کاملاً فازی پیشنهاد شده است. در این مطالعه، با توجه به مدل امیرتیموری و کردرستمی (۲۰۱۲) [۱۰] و مدل سو یوشی و سکیتانی (۲۰۰۷) [۱۳]، به ارائه مدل اندازه دامنه تنظیم شده در محیط فازی خواهیم پرداخت.

$$\max \sum_{i=1}^{m} \tilde{R}_i^x \tilde{d}_i + \sum_{r=1}^{s} \tilde{R}_r^y \tilde{f}_r + \sum_{k=1}^{K} \tilde{R}_k^z \tilde{b}_k + \sum_{k=1}^{K} \tilde{R}_k^z \tilde{b}'_k \qquad (2)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j \tilde{x}_{ij} + \tilde{d}_i = \tilde{x}_{io}\,;\; i=1,\dots,m,\; \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}'_j y_{ij} - \tilde{f}_r = \tilde{y}_{ro}\,;\; r=1,\dots,s$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j \tilde{z}_{kj} - \tilde{b}_k = \tilde{z}_{ko}\,;\; k=1,\dots,K,\; ; \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}'_j z_{kj} + \tilde{b}'_k = \tilde{z}_{ko}\,; k=1,\dots,K$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j = 1 \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}'_j = 1$$
$$\tilde{\lambda}_j \geq 0\, \tilde{\lambda}'_j \geq 0 \,\forall j,\; \tilde{d}_i \geq 0$$
$$\tilde{f}_r \geq 0\, \tilde{b}_k \geq 0\, \tilde{b}'_k \geq 0 \;\forall i, r, k$$

محدوده‌های مدل یکپارچه ورودی‌های فازی، خروجی‌های فازی و دامنه‌های تنظیم اندازه‌گیری میانی فازی می‌باشد که به صورت زیر می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد:

$$\tilde{R}_i^x = \begin{cases} R_i^{xL} = (m+s)^{-1}(\max\{x_{ij}^L \mid j=1,...,n\} - \min\{x_{ij}^L \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_i^{xC} = (m+s)^{-1}(\max\{x_{ij}^C \mid j=1,...,n\} - \min\{x_{ij}^C \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_i^{xU} = (m+s)^{-1}(\max\{x_{ij}^U \mid j=1,...,n\} - \min\{x_{ij}^U \mid j=1,...,n\})^{-1} \end{cases}$$

$$\tilde{R}_r^y = \begin{cases} R_r^{yL} = (m+s)^{-1}(\max\{y_{rj}^L \mid j=1,...,n\} - \min\{y_{rj}^L \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_r^{yC} = (m+s)^{-1}(\max\{y_{rj}^C \mid j=1,...,n\} - \min\{y_{rj}^C \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_r^{yU} = (m+s)^{-1}(\max\{y_{rj}^U \mid j=1,...,n\} - \min\{y_{rj}^U \mid j=1,...,n\})^{-1} \end{cases}$$

$$\tilde{R}_k^z = \begin{cases} R_k^{zL} = (m+s)^{-1}(\max\{z_{kj}^L \mid j=1,...,n\} - \min\{z_{kj}^L \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_k^{zC} = (m+s)^{-1}(\max\{z_{kj}^C \mid j=1,...,n\} - \min\{z_{kj}^C \mid j=1,...,n\})^{-1} \\ R_k^{zU} = (m+s)^{-1}(\max\{z_{kj}^U \mid j=1,...,n\} - \min\{z_{kj}^U \mid j=1,...,n\})^{-1} \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، مدل (۲) فازی شده مدل (۱) می‌باشد که $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{kj}, \tilde{d}_i, \tilde{b}_k, \tilde{b}'_k, \tilde{f}_r$ فازی شده $x_{ij}, y_{rj}, z_{kj}, d_i, b_k, b'_k, f_r$ در مدل بالا است. مراحل پیشنهادی برای حل مدل اندازه دامنه تنظیم شده فازی در پیوست (۱) ارائه می‌شود.

٦- مدل اندازه دامنه تنظیم شده با شرایط مکمل زائد

اکنون، برای دستیابی به راه حل‌های بهینه در مسئله‌های پرایمال و دوآل، ما از رویکرد ارائه شده توسط سویوشی و سکیتانی (۲۰۰۷) [۱۳] و ریوونوژکو و همکاران (۲۰۱۷) [۱۵] پیروی کرده و شرایط زائد مکمل قوی (SCSC) را از تئوری بهینه‌سازی ترال (۱۹۹۶) [۲۶] اعمال می‌کنیم. بنابراین، مدل غیرشعاعی شبکه SCSC را می‌توان به شرح زیر نوشت:

محدودیت‌های ۳-۱ تا ۳-۷ مدل پرایمال که همان محدودیت‌های مدل (۱) می‌باشد را نشان می‌دهد، شرایط ۳-۸ تا ۳-۱۳ محدودیت‌های دوآل مدل (۱) می‌باشد که در آن $w_k = (w_1,...,w_K)$ و $w'_k = (w'_1,...,w'_K)$ ،$v_i = (v_1,...,v_m)$ ،$u_r = (u_1,...,u_s)$ بردارهای متناظر مقادیر دوآل می‌باشند. محدودیت ۳-۱۴ نشان می‌دهد که تابع هدف دو محدودیت پرایمال و دوآل با هم برابر هستند. پنج محدودیت آخر محدودیت‌های مکمل زائد قوی (SCSC) هستند. برای این منظور، متغیر η در تابع هدف مدل (۳) گنجانده شده است تا اطمینان حاصل شود که شرایط مکمل قوی حاصل شده باشد. برای تصویرسازی بیشتر، ما

محدودیت‌های مدل‌های پرایمال و دوآل را در یک مدل جدید (۳) ادغام کرده‌ایم تا راه‌حلی برای مسائل پرایمال و دوآل تعیین کنیم تا شرایط مکمل زائد را برآورده کند. این تضمین می‌کند که راه حل جدید برای مسائل پرایمال و دوآل بهینه است. در واقع باید این را در نظر داشت که مدل ارائه شده هم مدل پرایمال و هم دوآل را به‌صورت همزمان در اختیار دارد و تابع هدف دو مدل را با هم برابر در نظر می‌گیرد. شرایط مکمل زائد این امکان را ایجاد می‌کند که کمترین فاصله ممکن را تا مرز کارا برای واحدهای تحت ارزیابی ناکارا به‌دست بیاورد. در عمل این باعث می‌شود که واحدهای تحت ارزیابی، کمترین مازاد ورودی و کمبود خروجی را داشته باشند.

$$\max \eta \qquad (3)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_i = x_{io} \quad ; i = 1\ldots m \quad 3-1 \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} - b_k = z_{ko} \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-2$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \quad 3-3 \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda'_j z_{kj} + b'_k = z_{ko} \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-4$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda'_j y_{ij} - f_r = y_{ro} \quad ; r = 1\ldots s \quad 3-5 \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda'_j = 1 \quad 3-6$$

$$\lambda_j \ge 0, \lambda'_j \ge 0 \ \forall j, d_i \ge 0, f_r \ge 0, b_k \ge 0, b'_k \ge 0 \ \forall i, r, k \quad 3-7 \qquad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0 \ge 0 \quad 3-8$$

$$\sum_{k=1}^{K} w'_k z_{kj} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u'_0 \ge 0 \quad 3-9 \qquad -v_i \ge R_i^x \quad ; i = 1\ldots m \quad 3-10$$

$$-u_r \ge R_r^y \quad ; r = 1\ldots s \quad 3-11 \qquad w'_k \ge R_k^z \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-12$$

$$-w_k \ge R_k^z \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-13 \qquad \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} R_i^x d_i + \sum_{r=1}^{s} R_r^y f_r + \sum_{k=1}^{K} R_k^z b_k + \sum_{k=1}^{K} R_k^z b'_k = \\ &-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'\end{aligned} \quad 3-14$$

$$\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0 \ge \eta \quad ; j = 1\ldots n \quad 3-15 \qquad d_i - v_i - R_i^x \ge \eta \quad ; i = 1\ldots m \quad 3-16$$

$$\lambda'_j + \sum_{k=1}^{K} w'_j z_{kj} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u'_0 \ge \eta \quad ; j = 1\ldots n \quad 3-17 \qquad f_r - u_r - R_r^y \ge \eta \quad ; r = 1\ldots s \quad 3-18$$

$$b'_k + w'_k - R_k^z \ge \eta \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-19 \qquad b_k - w_k - R_k^z \ge \eta \quad ; k = 1\ldots K \quad 3-20$$

۷- مدل اندازه دامنه تنظیم شده کاملاً فازی شده با شرایط مکمل زائد

در این مقاله فازی شده مدل پرایمال و دوآل بالا با شرایط مکمل زائد را با توجه به مدل (۳) بازنویسی می‌کنیم.

$$\max \tilde{\eta}$$

$$s.t.$$

$$\begin{array}{llll}
\sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\tilde{x}_{ij}+\tilde{d}_i=\tilde{x}_{io} \quad ; i=1,\dots,m \quad 4-1 & , & \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j\tilde{z}_{kj}-\tilde{b}_k=\tilde{z}_{ko} \quad ; k=1,\dots,K & 4-2 \\
\sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j=1 \quad 4-3 & , & \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}'_j z_{kj}+\tilde{b}'_k=\tilde{z}_{ko} \quad ; k=1,\dots,K & 4-4 \\
\sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}'_j\tilde{y}_{ij}-\tilde{f}_r=\tilde{y}_{ro} \quad ; r=1,\dots,s \quad 4-5 & , & \sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}'_j=1 & 4-6 \\
\tilde{\lambda}_j\ge 0,\tilde{\lambda}'_j\ge 0\ \forall j,\ \tilde{d}_i\ge 0,\tilde{f}_r\ge 0,\ \tilde{b}_k\ge 0,\tilde{b}'_k\ge 0\ \forall i,r,k \quad 4-7 & , & -\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i\tilde{x}_{ij}+\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}_k\tilde{z}_{kj}+\tilde{u}_0\ge 0 & 4-8 \\
\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}'_k\tilde{z}_{kj}+\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r\tilde{y}_{rj}+\tilde{u}'_0\ge 0 \quad 4-9 & , & -\tilde{v}_i\ge \tilde{R}^x_i \quad ; i=1,\dots,m & 4-10 \\
-\tilde{u}_r\ge \tilde{R}^y_r \quad ; r=1,\dots,s \quad 4-11 & , & \tilde{w}'_k\ge \tilde{R}^z_k \quad ; k=1,\dots,K & 4-12 \\
-\tilde{w}_k\ge \tilde{R}^z_k \quad ; k=1,\dots,K \quad 4-13 & , & \sum_{i=1}^{m}\tilde{R}^x_i\tilde{d}_i+\sum_{r=1}^{s}\tilde{R}^y_r\tilde{f}_r+\sum_{k=1}^{K}\tilde{R}^z_k\tilde{b}_k+\sum_{k=1}^{K}\tilde{R}^z_k\tilde{b}'_k= & \\
 & & -\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i\tilde{x}_{io}+\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}_k\tilde{z}_{ko}+\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}'_k\tilde{z}_{ko}+\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r y_{ro}+\tilde{u}_0+\tilde{u}' & 4-14 \\
\tilde{\lambda}_j-\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i\tilde{x}_{ij}+\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}_k\tilde{z}_{kj}+\tilde{u}_0\ge\tilde{\eta} \quad ; j=1,\dots,n \quad 4-15 & , & \tilde{d}_i-\tilde{v}_i-\tilde{R}^x_i\ge\tilde{\eta} \quad ; i=1,\dots,m & 4-16 \\
\tilde{\lambda}'_j+\sum_{k=1}^{K}\tilde{w}'_j\tilde{z}_{kj}+\sum_{r=1}^{s}\tilde{u}_r\tilde{y}_{rj}+\tilde{u}'_0\ge\tilde{\eta} \quad ; j=1,\dots,n \quad 4-17 & , & \tilde{f}_r-\tilde{u}_r-\tilde{R}^y_r\ge\tilde{\eta} \quad ; r=1,\dots,s & 4-18 \\
\tilde{b}'_k+\tilde{w}'_k-\tilde{R}^z_k\ge\tilde{\eta} \quad ; k=1,\dots,K \quad 4-19 & , & \tilde{b}_k-\tilde{w}_k-\tilde{R}^z_k\ge\tilde{\eta} \quad ; k=1,\dots,K & 4-20
\end{array} \qquad (۴)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، مدل (۴) فازی شده مدل (۳) می‌باشد. $\tilde{x}_{ij},\tilde{y}_{rj},\tilde{z}_{kj},\tilde{d}_i,\tilde{b}_k,\tilde{b}'_k,\tilde{f}_r$ فازی شده $x_{ij},y_{rj},z_{kj},d_i,b_k,b'_k,f_r$ همان مدل (۱) می‌باشند. همچنین $\tilde{u}_r=(u^l,u^c,u^u)$، $\tilde{v}_i=(v^l,v^c,v^u)$، $\tilde{w}'_k=(w'^l,w'^c,w'^u)$ و $\tilde{w}_k=(w^l,w^c,w^u)$، بردارهای فازی شده‌مقادیر دوآل متناظر مدل (۱) که همان $u_r=(u_1,\dots,u_s)$، $v_i=(v_1,\dots,v_m)$، $w'_k=(w'_1,\dots,w'_K)$ و $w_k=(w_1,\dots,w_K)$، در مدل بالا است. همچنین $\tilde{u}_0=(u_0{}^l,u_0{}^c,u_0{}^u)$ و $\tilde{u}'_0=(u'^l_0,u'^c_0,u'^u_0)$ فازی‌شده محدودیت‌های تحدب u_0 و u'_0 مدل (۳) می‌باشد. مدل (۴) را می‌توان به صورت زیر حل می‌کنیم.

در مرحله اول، با توجه به تعریف پارامترهای $\tilde{x}_{ij},\tilde{y}_{rj},\tilde{z}_{kj},\tilde{d}_i,\tilde{b}_k,\tilde{b}'_k,\tilde{f}_r$، $\tilde{u}_r$، $\tilde{v}_i$، $\tilde{w}'_k$ و $\tilde{w}_k$، $\tilde{u}_0$ و $\tilde{u}'_0$، این پارامترها در خوش‌بینانه‌ترین، محتمل‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$((x_{io})^l,(x_{io})^c,(x_{io})^u,(y_{ro})^l,(y_{ro})^c,(y_{ro})^u,(z_{ko})^l,(z_{ko})^c,(z_{ko})^u,(d_{io})^l,$$
$$(d_{io})^c,(d_{io})^u,(b_{ko})^l,(b_{ko})^c,(b_{ko})^u,(b'_{ko})^l,(b'_{ko})^c,(b'_{ko})^u,(f_{ro})^l,(f_{ro})^c,(f_{ro})^u,$$
$$(R_i)^l,(R_i)^c,(R_i)^u,(R_k)^l,(R_k)^c,(R_k)^u,(R_r)^l,(R_r)^c,(R_r)^u,(\lambda_j)^l,(\lambda_j)^c,(\lambda_j)^u,$$
$$(\lambda'_j)^l,(\lambda'_j)^c,(\lambda'_j)^u)),(z_{ko})^l,(z_{ko})^c,(z_{ko})^u,(v_i)^l,(v_i)^c,(v_i^u),(w_k)^l,(w_k)^c,(w_k)^u,$$
$$(w'_k)^l,(w'_k)^c,(w'_k)^u,(u_r)^l,(u_r)^c,(u_r)^u,(u_0)^l,(u_0)^c,(u_0)^u,(u'_0)^l,(u'_0)^c,(u'_0)^u)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مسئله زیر، فازی‌شده مدل پرایمال-دوآل با شرایط مکمل زائد برای محتمل‌ترین حالت ممکن می‌باشد. محدودیت‌های ۱ تا ۱۹ فازی‌شده مدل پرایمال را نشان می‌دهد، $z_{kj}(k=1,...,K)$ ، Kخروجی برای مرحله ۱ دارند که به عنوان ورودی مرحله ۲ می‌باشند که در سه حالت خوش‌بینانه، محتمل و بدبینانه قرار گرفته‌اند. علاوه بر این، $x_{ij}(i=1,...,m)$ ، ورودی‌های اولیه و $y_{rj}(r=1,...,s)$ ، خروجی‌های نهایی می‌باشند. همچنین $d_i=(d_1,...,d_m)$ ، $f_r=(f_1,...,f_s)$ ، $b_k=(b_1,...,b_k)$ ، $b'_k=(b'_1,...,b'_k)$ متغیرهای کمبود می‌باشند که در هر سه حالت در مدل دیده می‌شود. محدودیت‌های ۱۹ تا ۲۹ و دو محدودیت انتهایی مدل (۵) شرایطی را ایجاد می‌کند تا حالت بدبینانه کمتر از محتمل، محتمل کمتر از خوش‌بینانه باشد. شرایط ۳۰ تا ۴۷ فازی‌شده مدل دوآل می‌باشد، که در آن $u_r=(u_1,...,u_s)$ ، $v_i=(v_1,...,v_m)$ ، $w'_k=(w'_1,...,w'_K)$ و $w_k=(w_1,...,w_K)$ بردارهای متناظر مقادیر فازی دوآل در سه حالت خوش‌بینانه، محتمل و بدبینانه می‌باشند. و محدودیت ۴۸ نشان می‌دهد که دو محدودیت فازی پرایمال و دوآل با هم برابرهستند. محدودیت‌های آخر، فازی شده محدودیت‌ها با شرایط مکمل زائد قوی (SCSC) هستند. برای این منظور، متغیر η در تابع هدف مدل (۵) گنجانده شده است تا اطمینان حاصل شود که شرایط مکمل زائد قوی حاصل شده باشد. مراحل پیشنهادی برای حل مدل اندازه دامنه تنظیم شده فازی با شرایط مکمل زائد قوی در پیوست (۲) ارائه می‌شود. دو محدودیت آخر تضمین می‌کند که سه حالت خوش‌بینانه، محتمل و بدبینانه به درستی اتفاق بیفتد.

$$\max \eta$$

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^l ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^c ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^u \qquad i = 1,\dots,m \qquad (5)\\
&(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^l ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^c ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^u \qquad k = 1,\dots,K\\
&(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^l ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^c ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^u \qquad k = 1,\dots,K\\
&(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^l ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^c ,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^u \qquad r = 1,\dots,s\\
&(\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^l) = (1)^l ,(\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^c) = (1)^c ,(\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^u) = (1)^u\\
&(\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^l) = (1)^l ,(\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^c) = (1)^c ,(\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^u) = (1)^u\\
&(d_{io})^c - (d_{io})^l \ge 0 \;\; (d_{io})^u - (d_{io})^c \ge 0 \;\; (d_{io})^l \ge 0 \;\; (b_{ko})^c - (b_{ko})^l \ge 0 \;\; (b_{ko})^u - (b_{ko})^c \ge 0 \;\; (b_{ko})^l \ge 0\\
&(b'_{ko})^c - (b'_{ko})^l \ge 0 \;\; (b'_{ko})^u - (b'_{ko})^c \ge 0 \;\; (b'_{ko})^l \ge 0 \; (f_{ro})^c - (f_{ro})^l \ge 0 \;\; (f_{ro})^u - (f_{ro})^c \ge 0 \;\; (f_{ro})^l \ge 0\\
&(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^l \ge 0 (-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^c \ge 0 (-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^u \ge 0\\
&(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^l \ge 0 (-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^c \ge 0 (-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^u \ge 0\\
&(-v_i)^l \ge (R_i^x)^l ,(-v_i)^c \ge (R_i^x)^c ,(-v_i)^u \ge (R_i^x)^u \qquad ; i = 1,\dots,m\\
&(-u_r)^l \ge (R_r^y)^l ,(-u_r)^c \ge (R_r^y)^c ,(-u_r)^u \ge (R_r^y)^u \qquad ; r = 1,\dots,s\\
&(-w_k)^l \ge (R_k^z)^l ,(-w_k)^c \ge (R_k^z)^c ,(-w_i)^u \ge (R_k^z)^u \qquad ; k = 1,\dots,K\\
&(w'_k)^l \ge (R_k^z)^l ,(w'_k)^c \ge (R_k^z)^c ,(w'_i)^u \ge (R_k^z)^u \qquad ; k = 1,\dots,K\\
&(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^c =\\
&(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'_0)^c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^l \geq \eta^l ، (\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^c \geq \eta^c \\
&(\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{kj} + u_0)^u \geq \eta^u ، (\lambda'_j + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{kj} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u'_0)^l \geq \eta^l \\
&(\lambda'_j + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{kj} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u'_0)^c \geq \eta^c ، (\lambda'_j + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{kj} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u'_0)^u \geq \eta^u \\
&(d_i - v_i - R_i^x)^l \geq \eta^l ، \ (d_i - v_i - R_i^x)^c \geq \eta^c ، \ (d_i - v_i - R_i^x)^u \geq \eta^u ; i = 1,\dots, m \\
&(f_r - u_r - R_r^y)^l \geq \eta^l ، \ (f_r - u_r - R_r^y)^c \geq \eta^c ، \ (f_r - u_r - R_r^y)^u \geq \eta^u ; r = 1,\dots, s \\
&(b_k - w_k - R_k^z)^l \geq \eta^l ، (b_k - w_k - R_k^z)^c \geq \eta^c ، (b_k - w_k - R_k^z)^u \geq \eta^u ; k = 1,\dots, K \\
&(b'_k + w'_k - R_k^z)^l \geq \eta^l ، (b'_k + w'_k - R_k^z)^c \geq \eta^c ، (b'_k + w'_k - R_k^z)^u \geq \eta^u ; k = 1,\dots, K \\
&(u_0 + u'_0)^u \geq (u_0 + u'_0)^c \geq (u_0 + u'_0)^l \\
&\eta^u \geq \eta^c \geq \eta^l
\end{aligned}
$$

۸- مثال عددی

سیستم هوایی به‌عنوان یکی از امن‌ترین و سریع‌ترین راه برای مسافرت و حمل‌ونقل، تأثیر شگرفی بر رشد اقتصاد در هر کشوری دارد. در سالیان گذشته تغییرات بزرگی در کارآیی اقتصادی و عملیاتی کمپانی‌های هوایی اتفاق افتاده است. به‌عنوان مثال، کارآیی فاصله‌ای در چهارده ایرلاین ایرانی توسط حیدری و همکاران (۲۰۲۰) [۲۱] مورد ارزیابی قرار گرفته است. برا و درا (۲۰۰۹) [۲۷] کارآیی ۱۳ شرکت هواپیمایی در ایالات متحده امریکا را بر اساس کاهش ساعات مسدود بودنارزیابی کردند که باعث افزایش کارآیی در آن شد را مورد بررسی قرار دادند. هانگ و ژانگ (۲۰۱۰) [۲۸] با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها به تجزیه‌وتحلیل ۲۹ شرکت هواپیمای بین‌المللی در بازه (۱۹۹۸-۲۰۰۲) پرداخته و به این نتیجه رسیدند که شرکت‌های بین‌المللی با سهم بالای تجارت کالایی، بسیار کارآمدتر از خطوط هوایی با سهم پایین‌تر از تجارت کالا می‌باشند. توسلی و همکاران (۲۰۱۴) [۲۹] با استفاده از مدل شبکه بر پایه کمبود در ارزیابی کارآیی تکنیکی و توانایی سرویس در یازده ایرلاین ایران پرداخته است. سلطان‌زاده و همکاران (۲۰۱۸) [۲۰] مدل شبکه پویای فازی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه کردند که برای ارزیابی کارآیی در هفت ایرلاین در بازه (۲۰۱۰-۲۰۱۲) بوده است. لی و کویی (۲۰۱۸) [۳۰] مدل RAM پویا برای ارزیابی کارآیی پویا در ۲۹ ایرلاین در بازه (۲۰۰۹-۲۰۱۵) را ارائه نمودند.

جدول ۱: داده‌های ایرلاین‌های ایران ۲۰۱۴

DMU	ورودی تعداد صندلی‌ها برای پرواز	مقدار میانی تعداد صندلی بر حسب کیلومتر	خروجی مسافرت- کیومتر انجام شده
۱	۶۹۴،۶۹۴،۲	۹۲۳،۸۳۸۱	۱۰۰،۵۱۱،۱
۲	۱۵۱،۴۷۱،۱	۰۲۶،۲۱۶،۱	۵۲۴،۰۶۸،۱
۳	۴۳۵،۱۳۴،۲	۵۹۷،۳۷۱،۱	۰۸۶،۱۸۳،۱
۴	۸۳۵،۱۷۵	۷۹۴،۱۵۳	۵۱۴،۱۲۲
۵	۷۶۰،۵۷۸،۲	۵۲۴،۹۲۵،۱	۷۵۱،۶۸۲،۱
۶	۹۵۰،۵۳۵،۱	۹۹۶،۲۴۸،۱	۵۱۲،۱۶۱،۱
۷	۲۴۰،۵۹۸،۲	۹۵۱،۲۱۰،۲	۲۸۶،۵۵۹،۱
۸	۴۴۰،۲۱	۵۰۹،۱۱	۸۶۰،۸
۹	۴۱۶،۹۴۰	۶۲۶،۶۶۲	۸۵۹،۵۵۶
۱۰	۱،۳۱۹،۳۸۶	۱،۰۷۰،۳۹۸	۸۶۱،۴۴۱
۱۱	۱،۶۸۲،۸۴۳	۱،۵۱۷،۸۴۷	۱،۲۶۰،۰۴۹
۱۲	۳،۷۸۲،۴۳۰	۳،۲۹۵،۲۶۷	۲،۵۹۱،۷۶۹
۱۳	۳۶۳،۶۴۰	۲۶،۳۱۹	۱۸،۶۷۹
۱۴	۸۱۳،۸۳۰	۴۹۳،۱۶۳	۳۹۵،۳۳۴

در این بخش، مدل RAM فازی برای ارزیابی کارآیی در ایرلاین‌های ایران به‌کار می‌رود. همان‌طور که در بالا بیان شد، در سالیان اخیر مدل‌های بسیاری در DEA با ساختار شبکه‌ای برای کارآیی ایرلاین‌ها ارائه شده است. با توجه به سلطان‌زاده و عمرانی (۲۰۱۸) [۲۰]، حیدری و همکاران (۲۰۲۰) [۲۱]، ساختار دو مرحله‌ای با عملکردها و سرویس‌ها در ساختار ایرلاین‌ها طراحی شده است. در این مقاله ما به پیاده‌سازی ساختار شبکه دو مرحله‌ای بر روی داده‌های مقاله حیدری و همکاران (۲۰۲۰) [۲۱] پرداخته و نتایج روی مدل‌های ارائه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعداد صندلی‌ها برای پروازها را به عنوان ورودی در نظر گرفته، برای مقدار میانی، تعداد صندلی بر حسب کیلومتر- پرواز و در انتها، مسافرت- کیلومتر انجام شده را به عنوان خروجی، در نظر گرفته شده است. جدول (۱) داده‌های موجود را نشان می‌دهد.

شایان ذکر است که داده‌های جمع آوری شده از ۱۴ ایرلاین داخلی در سال ۲۰۱۴ از سازمان هواپیمایی ایران می‌باشد. باید توجه داشت داده‌های موجود در جدول (۲) نرمال شده داده‌ها بین صفر و یک می‌باشد. همچنین با توجه به نظر کارشناسان موجود داده‌ها به عنوان اعداد فازی

مثلث متقارن در نظر گرفته می‌شوند. در ادامه برای نشان دادن عدم اطمینان داده‌ها، تابع عضویتی با حداکثر نوسان ۱۰٪ توسط کارشناسان بخش آماری در نظر گرفته شده است. در ادامه داده‌های فازی مربوط به تعداد صندلی‌ها بر حسب کیلومتر، تعداد صندلی‌های پرواز و مسافرت بر حسب کیلومتر طی شده در جدول شماره (۲) ارائه شده است.

جدول ۲: داده‌های فازی شده ایرلاین های ایران در سال ۲۰۱۴

DMU	ورودی تعداد صندلی‌ها برای پرواز			مقدار میانی تعداد صندلی بر حسب کیلومتر			خروجی مسافرت- کیلومتر انجام شده		
۱	۰/۵۰۲	۰/۵۵۸	۰/۶۱۴	۰/۶۴۱	۰/۷۱۲	۰/۷۸۴	۰/۵۲۵	۰/۵۸۳	۰/۶۴۱
۲	۰/۳۳۲	۰/۳۶۹	۰/۴۰۶	۰/۳۵۰	۰/۳۸۹	۰/۴۲۸	۰/۳۷۱	۰/۴۱۲	۰/۴۵۴
۳	۰/۳۷۵	۰/۴۱۶	۰/۴۵۸	۰/۵۰۸	۰/۵۶۴	۰/۶۲۱	۰/۴۱۱	۰/۴۵۶	۰/۵۰۲
۴	۰/۰۴۲	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۲	۰/۰۴۶	۰/۰۵۱	۰/۰۴۳	۰/۰۴۷	۰/۰۵۲
۵	۰/۵۲۶	۰/۵۸۴	۰/۶۴۳	۰/۶۱۴	۰/۶۸۲	۰/۷۵۰	۰/۵۸۴	۰/۶۴۹	۰/۷۱۴
۶	۰/۳۴۱	۰/۳۷۹	۰/۴۱۷	۰/۳۶۵	۰/۴۰۶	۰/۴۴۷	۰/۴۰۳	۰/۴۴۸	۰/۴۹۳
۷	۰/۶۰۴	۰/۶۷۱	۰/۷۳۸	۰/۶۱۸	۰/۶۸۷	۰/۷۵۶	۰/۵۴۱	۰/۶۰۲	۰/۶۶۲
۸	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴
۹	۰/۱۸۱	۰/۲۰۱	۰/۲۲۱	۰/۲۲۴	۰/۲۴۹	۰/۲۷۳	۰/۱۹۳	۰/۲۱۵	۰/۲۳۶
۱۰	۰/۲۹۲	۰/۳۲۵	۰/۳۵۷	۰/۳۱۴	۰/۳۴۹	۰/۳۸۴	۰/۲۹۹	۰/۳۳۲	۰/۳۶۶
۱۱	۰/۴۱۵	۰/۴۶۱	۰/۵۰۷	۰/۴۳۹	۰/۴۸۷	۰/۵۳۶	۰/۴۳۸	۰/۴۸۶	۰/۵۳۵
۱۲	۰/۹	۱	۱/۱	۰/۹	۱	۱.۱	۰/۹	۱	۱/۱
۱۳	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۸۷	۰/۰۹۶	۰/۱۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸
۱۴	۰/۱۳۵	۰/۱۵۰	۰/۱۶۵	۰/۱۹۴	۰/۲۱۵	۰/۲۳	۰/۱۳۷	۰/۱۵۳	۰/۱۶۸

ابتدا با استفاده از مدل DEA-RAM شبکه‌ای، به محاسبه کارایی خطوط هوایی می‌پردازیم. سپس، با توجه به مدل پیشنهادی شبکه کاملاً فازی DEA-RAM، و با توجه به تابع هدف،DMU های کارای خطوط هوایی به‌دست می‌آید. جدول (۳) نتایج مدل DEA-RAM را برای ۱۴ شرکت هواپیمایی نشان می‌دهد. همان‌طور که نشان داده شده است، DMU های ۰۸ و ۱۲ بهترین عملکرد را در میان سایر خطوط هوایی داشته‌اند، که با توجه به جدول، کمبود خروجی یا مازاد ورودی ندارند. در نتیجه این واحدها کارا می‌باشند. در ادامه، با استفاده از مدل DEA-RAM با شرایط مکمل زائد قوی نتایج را بررسی می‌کنیم، که در جدول ۴ قابل مشاهده می‌باشد.

بررسی نتایج مدل (۴) نشان می‌دهد که DMU های ۰۸ و ۱۲ کارا می‌باشند، به این معنی است که مازاد ورودی و کمبود خروجی این واحدهای تصمیم‌گیری صفر می‌باشند. η^* نشان دهنده نزدیکترین وجهک برای رسیدن به مرز کارا می‌باشد که در جدول زیر نشان داده شده است. نتایج جدول‌های (۳) و (۴) در زیر آورده شده است.

جدول ۳: نتایج مدل اندازه دامنه تنظیم شده فازی در حالت کلی مدل (۳-۱)

DMU	θ^*	کمبود ورودی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود خروجی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود مقدار میانی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه					
۱	۰/۰۱۴	۰/۰۰۶	۰/۰۴۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲	۰/۰۵۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۱۵	۰/۱۵۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۲۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۳	۰/۰۱۴	۰/۰۰۰	۰/۰۳۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۴	۰/۰۳۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۴	۰/۱۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۵	۰/۰۳۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۳۰	۰/۰۳۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۶۶	۰/۰۷۳	۰/۰۰۰
۶	۰/۰۵۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۴۲	۰/۱۷۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۷	۰/۰۶۰	۰/۰۹۳	۰/۱۴۸	۰/۰۰۰	۰/۰۲۵	۰/۰۲۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱	۰/۰۰۰
۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۹	۰/۰۳۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۵	۰/۰۷۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۲۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۰	۰/۰۴۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۵۷	۰/۱۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۸	۰/۰۵۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۱	۰/۰۵۵	۰/۰۰۰	۰/۰۴۷	۰/۰۰۰	۰/۱۰۷	۰/۱۳۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۳	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۴	۰/۰۲۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۴۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۴	۰/۲۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

جدول ۴: نتایج مدل اندازه دامنه تنظیم شده فازی با شرایط مکمل زائد قوی در حالت کلی مدل (۵-۱)

DMU	η^*	کمبود ورودی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود خروجی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود مقدار میانی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه					
۱	۰/۰۰۷	۰/۰۳۶	۰/۰۴۶	۰/۰۳۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	/۰۱۴۰	۰/۱۵۶	۰/۱۲۷	۰/۰۲۴	۰/۰۲۶	۰/۰۲۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۳	۰/۰۰۴	۰/۰۲۹	۰/۰۳۲	۰/۰۲۶	۰/۰۱۱	۰/۰۱۴	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

DMU	η^*	کمبود ورودی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود خروجی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه			کمبود مقدار میانی محتمل، خوش‌بینانه، بدبینانه					
۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۸۴	۰/۱۰۲	۰/۰۸۴	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۳۴	۰/۰۳۴	۰/۰۲۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۵۹	۰/۰۷۳	۰/۰۵۹
۶	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۴۶	۰/۱۷۸	۰/۱۴۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۷	۰/۰۰۷	۰/۱۲۲	۰/۱۴۸	۰/۱۲۲	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۲۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۱۶	۰/۰۲۱	۰/۰۱۶
۸	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۶۹	۰/۰۷۷	۰/۰۶۹	۰/۰۲۱	۰/۰۲۵	۰/۰۲۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۹۵	۰/۱۰۵	۰/۰۹۵	۰/۰۵۲	۰/۰۵۶	۰/۰۴۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۱	۰/۰۰۴	۰/۰۳۸	۰/۰۴۷	۰/۰۳۸	۰/۱۰۹	۰/۱۳۴	۰/۱۰۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۲	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۳	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۳۳	۰/۰۴۷	۰/۰۳۳	۰/۰۲۲	۰/۰۲۷	۰/۰۲۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

در مدل فازی (۲) که همان مدل ارائه‌شده توسط حیدری و همکاران (۲۰۲۰) [۲۱] است، کارایی چهارده واحد تحت ارزیابی با استفاده از یک مدل شبکه ساده دو مرحله‌ای فازی محاسبه شده است، همان‌طور که در نتایج جدول (۳) می‌بینیم، کمبود ورودی، کمبود مقدار میانی و کمبود خروجی برای هر یک از حالت‌های محتمل، خوش‌بینانه و بدبینانه به‌دست آمده است، در واقع مقدار کمبود برای رسیدن به ابرصفحه کارا را نشان می‌دهد. بررسی نتایج نشان می‌دهد واحد تحت ارزیابی ۰۸ کمبود مقادیر ورودی، میانی و خروجی در هیچ یک از حالت‌های محتمل، خوش‌بینانه و بدبینانه ندارد، بنابراین واحد تحت ارزیابی کارا می‌باشد. همچنین برای واحد تحت ارزیابی ۰۴ که واحدی ناکارا می‌باشد کمبود ورودی (۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰)، کمبود مقادیر میانی (۰/۰۰۲، ۰/۰۰۸، ۰/۰۰۰) و (۰/۰۰۰،۰/۰۰۰،۰/۰۰۰) و کمبود خروجی (۰/۰۱۴، ۰/۱۰۲، ۰/۰۰۰) را در هر یک از حالت‌های محتمل، خوش‌بینانه و بدبینانه به ما نشان می‌دهد. مقادیر حاصل در جدول (۳) نشان می‌دهد که مقادیر محتمل از خوش‌بینانه و همچنین مقادیر بدبینانه از محتمل کمتر می‌باشد. در ارزیابی جدول (۴) که به بررسی نتایج مدل (۴) یعنی مدل تحت ارزیابی اندازه دامنه تنظیم شده فازی با شرایط مکمل زائد قوی می‌پردازد، این امکان فراهم شده است که نزدیک‌ترین ابرصفحه ممکن برای هر واحد تحت ارزیابی ناکارا به‌دست آید. نتایج مشاهده شده در جدول (۴) این ادعا را تأیید می‌نماید. نتایج واحد تحت ارزیابی ۱۲ نشان می‌دهد که کمبود مقادیر ورودی، میانی و خروجی برای آن وجود ندارد در

نتیجه واحد تحت ارزیابی کارا می‌باشد. همچنین نتایج واحد ناکارای تحت ارزیابی ۰۴ نشان می‌دهد که کمبود ورودی (۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰)، کمبود مقادیر میانی (۰/۰۰۶، ۰/۰۰۸، ۰/۰۰۶) و (۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰، ۰/۰۰۰) و کمبود خروجی (۰/۰۸۴، ۰/۱۰۲، ۰/۰۸۴) می‌باشد. با بررسی نتایج θ^* و η^* به این می‌رسیم که نزدیک‌ترین وجهک برای رسیدن به مرز کارا به ازای مدل ارائه‌شده با شرایط مکمل زائد به طرز چشم‌گیری نسبت به مدل اولیه بهبودیافته است. شایان ذکر است که مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار گمز حل شده‌اند.

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از مدل اندازه دامنه تنظیم شده (RAM) با شرایط مکمل زائد قوی برای پیدا کردن واحدهای کارا در حالی استفاده شده است که داده‌های فازی و نادقیق حضور دارند. با در نظر گرفتن تابع اولیه و دوآل و همچنین شرایط مکمل زائد به مدلی برای پیدا کردن واحدهای کارا و همچنین کمترین فاصله تا مرز کارا برای تصویر کردن واحدهای ناکارا، دست پیدا کرده‌ایم. از سوی دیگر، با توجه به اینکه در دنیای واقعی اغلب اعداد غیرقطعی می‌باشند. در این مقاله مدل DEA-RAM دو مرحله‌ای کاملاً فازی همراه با شرایط مکمل زائد را از یک روش MOLP لکزیکوگراف حل نمودیم. با توجه به اینکه مسئله فازی با سه عملکرد تابع هدف به وجود آمده است، در نتیجه با روش لکزیکوگراف آن را حل می‌نماییم. در ادامه برای نشان دادن قابلیت مدل، از ۱۴ واحد تصمیم‌گیری استفاده نمودیم که مربوط به ایرلاین‌های ایران می‌باشد. مدل RAM کاملاً فازی می‌تواند نشان دهد که یک شرکت هواپیمایی چقدر می‌تواند عملکرد خود را در شرایط مطلوب بهبود ببخشد. در صورت غیرقطعی بودن داده‌ها، مدل کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها مفید نمی‌باشد و استفاده از مدل‌های فازی تحلیل پوششی داده‌ها برای محاسبه عملکرد واحدهای تصمیم و تعیین حساسیت به تغییر داده‌ها مفیدتر می‌باشد. در آخر، بر خلاف سایر مدل‌های DEA، مدل پیشنهادی ما کارایی واحدها را برای هر حالت فازی محاسبه می‌کند و با توجه به وجود شرایط مکمل زائد قوی، در عمل نزدیکترین ابرصفحه ممکن برای رسیدن به مرز کارایی را در نظر می‌گیرد. در ادامه با در نظر گرفتن شرایط مکمل زائد، کمترین کمبودهای ورودی و خروجی در هر حالت به عنوان عدد فازی گزارش می‌شود. در واقع، شرایط مکمل زائد در مدل پیشنهادی این امکان را به وجود آورده است که کمترین فاصله ممکن را تا مرز کارا برای واحدهای تصمیم‌گیری در اختیار ما قرار دهد. در نتیجه بهترین نمره کارایی را به ما می‌دهد. همچنین، رویکرد پیشنهادی را می‌توان در مواردی که شاخص‌های نامطلوب در سیستم‌های تولید

تحت عدم قطعیت موجود هستند، تعمیم داد. همچنین پیشنهاد می‌شود، از مدل موجود برای به‌دست آوردن بازده به مقیاس و مقیاس اقتصادی در حالت فازی نیز استفاده شود.

۱۰- پی‌نوشت‌ها

١. Charnes
٢. Lewis
٣. Amirteimoori
٤. Salari Boron
٥. Khaledian
٦. Ruggiero
٧. Yu
٨. Kordrostami
٩. Krivonozhko
١٠. Shakouri Gangavi
١١. Seiford
١٢. Kao
١٣. Kongar
١٤. Yuan
١٥. Soltanzadeh

۱۱- منابع

[١] Charnes, A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units.* European journal of operational research, ١٩٧٨. ٢(٦): p. .٤٤٤-٤٢٩

[٢] Ruggiero, J., *Non-discretionary inputs in data envelopment analysis.* European Journal of Operational Research, ١٩٩٨. ١١١(٣): p. .٤٦٩-٤٦١

[٣] Seiford, L.M. and J. Zhu, *Profitability and marketability of the top ٥٥US commercial banks.* Management science, ١٩٩٩. ٤٥(٩): p. .١٢٨٨-١٢٧٠

[٤] Lewis, H.F. and T.R. Sexton, *Network DEA: efficiency analysis of organizations with complex internal structure.* Computers & Operations Research, ٢٠٠٤. ٣١(٩): p. .١٤١٠-١٣٦٥

[٥] Yu, M.-M. and E.T. Lin, *Efficiency and effectiveness in railway performance using a multi-activity network DEA model.* Omega, ٢٠٠٨. ٣٦(٦): p. .١٠١٧-١٠٠٥

[٦] Amirteimoori, A., S. Kordrostami, and H. Azizi, *Additive models for network data envelopment analysis in the presence of shared resources.* Transportation Research Part D: Transport and Environment, ٢٠١٦. ٤٨: p. .٤٢٤-٤١١

[٧] Kao, C. and S.-N. Hwang, *Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan.* European journal of operational research, ٢٠٠٨. ١٨٥(١): p. .٤٢٩-٤١٨

[٨] Tone, K. and M. Tsutsui, *Network DEA: A slacks-based measure approach.* European journal of operational research, ٢٠٠٩. ١٩٧(١): p. .٢٥٢-٢٤٣

[٩] Kao, C. and S.-N. Hwang, *Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance.* Decision Support Systems, ٢٠١٠. ٤٨(٣): p. .٤٤٦-٤٣٧

[١٠] Amirteimoori ,A. and S. Kordrostami, *Production planning in data envelopment* *analysis.* International Journal of Production Economics, ۲۰۱۲. ۱٤۰(۱): p. .۲۱۸-۲۱۲

[۱۱] Kongar, E.A. and K. Rosentrater, *data Envelopment Analysis Approach to compare the Environmental Efficiency of Energy utilization.* International Journal of Green Computing (IJGC), ۲۰۱۰. ۱(۲): p. .۱۷-۱

[۱۲] Salari Boron, M. and M. Zandieh, *Measuring the efficiency of internet shops using a multi stages Data Envelopment Analysis (DEA) model.* Management Research in Iran, ۲۰۱٦. ۲۰(۳): p. .۱٥۲-۱۲۷

[۱۳] Sueyoshi, T. and K. Sekitani, *Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach.* European Journal of Operational Research, ۲۰۰۷. ۱۷٦(۳): p. .۱۹٤٦-۱۹۱۸

[۱٤] Krivonozhko, V.E., F.R. Førsund, and A.V. Lychev, *Measurement of returns to scale using non-radial DEA models.* European Journal of Operational Research, ۲۰۱٤. ۲۳۲(۳): p. .٦۷۰-٦٦٤

[۱٥] Krivonozhko, V.E., A.V. Lychev, and F. Førsund, *Measurement of returns to scale in radial DEA models.* Computational mathematics and mathematical physics, ۲۰۱۷. ٥۷(۱): p. .۹۳-۸۳

[۱٦] h. Fakhr Mousavi, S.M., et al., *Non-radial two-stage network DEA model to estimate returns to scale.* Journal of Modelling in Management, ۲۰۲۱. **ahead-of-print**(ahead-of-print.(

[۱۷] Yuan, G., *Two-stage fuzzy production planning expected value model and its approximation method.* Applied Mathematical Modelling, ۲۰۱۲. ۳٦(٦): p. -۲٤۲۹ .۲٤٤٥

[۱۸] Khaledian, F. and M. Momeni, *Leveling of Project Resources under Fuzzy-Stochastic Conditions.* Modern Research in Decision Making, ۲۰۲۱. ٦(۳): p. -۱۲۹ .۱٥٤

[۱۹] Shakouri Gangavi, H. and A. Kazemi, *Reduction of Energy Intensity in a Hospital after Implementation of an Energy Management System Considering Consumer Fuzzy Preferences.* Modern Research in Decision Making, ۲۰۱۸. ۲(٤): p. .۱۲۸-۱۰٥

[۲۰] Soltanzadeh, E. and H. Omrani, *Dynamic network data envelopment analysis model with fuzzy inputs and outputs: An application for Iranian Airlines.* Applied Soft Computing, ۲۰۱۸. ٦۳: p. .۲۸۸-۲٦۸

[۲۱] Heydari, C., H. Omrani, and R. Taghizadeh, *A fully fuzzy network DEA-Range Adjusted Measure model for evaluating airlines efficiency: A case of Iran.* Journal of Air Transport Management, ۲۰۲۰. ۸۹: p. .۱۰۱۹۲۳

[۲۲] Aida, K., et al., *Evaluating water supply services in Japan with RAM: a range-adjusted measure of inefficiency*. Omega, ۱۹۹۸. ۲٦(۲): p. .۲۳۲-۲۰۷

[۲۳] Cooper, W.W., K.S. Park, and J.T. Pastor, *RAM: a range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA.* Journal of Productivity analysis, ۱۹۹۹. ۱۱(۱): p. .٤۲-٥

[۲٤] Banker, R.D., et al., *Returns to scale in different DEA models.* European Journal of Operational Research, ۲۰۰٤. ۱٥٤(۲): p. .۳٦۲-۳٤٥

[۲٥] Sueyoshi, T. and M. Goto, *Measurement of returns to scale and damages to scale for DEA-based operational and environmental assessment: how to manage desirable (good) and undesirable (bad) outputs?* European journal of operational research, ۲۰۱۱. ۲۱۱(۱): p. .۸۹-۷٦

[۲٦] Thrall, R.M., *Duality, classification and slacks in DEA.* Annals of Operations Research, ۱۹۹٦. ٦٦(۲): p. .۱۳۸-۱۰۹

[۲۷] Bhadra, D., *Race to the bottom or swimming upstream: performance analysis of US airlines.* Journal of Air Transport Management, ۲۰۰۹. ۱٥(٥): p. .۲۳٥-۲۲۷

[۲۸] Hong, S .and A. Zhang, *An efficiency study of airlines and air cargo/passenger divisions: a DEA approach.* World Review of Intermodal Transportation Research, ۲۰۱۰. ۳(۲-۱): p. .۱٤۹-۱۳۷

[۲۹] Tavassoli, M., G.R. Faramarzi, and R.F. Saen, *Efficiency and effectiveness in airline performance using a SBM-NDEA model in the presence of shared input.* Journal of Air Transport Management, ۲۰۱٤. ۳٤: p. .۱٥۳-۱٤٦

[۳۰] Li, Y. and Q. Cui, *Airline efficiency with optimal employee allocation: an input-shared network range adjusted measure.* Journal of Air Transport Management, ۲۰۱۸. ۷۳: p. .۱٦۲-۱٥۰

پیوست (۱):

در مرحله اول، با توجه به تعریف پارامترهای $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}, \tilde{z}_{kj}, \tilde{d}_i, \tilde{b}_k, \tilde{b}'_k, \tilde{f}_r$، این پارامترها در خوش‌بینانه‌ترین، محتمل‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$((x_{io})^l،(x_{io})^c،(x_{io})^u،(y_{ro})^l،(y_{ro})^c،(y_{ro})^u،(z_{ko})^l،(z_{ko})^c،(z_{ko})^u،(d_{io})^l،(d_{io})^c،(d_{io})^u،$$
$$(b_{ko})^l،(b_{ko})^c،(b_{ko})^u،(b'_{ko})^l،(b'_{ko})^c،(b'_{ko})^u،(f_{ro})^l،(f_{ro})^c،(f_{ro})^u،(R_i)^l،(R_i)^c،(R_i)^u،(R_k)^l،$$
$$(R_k)^c،(R_k)^u،(R_r)^l،(R_r)^c،(R_r)^u،(\lambda_j)^l،(\lambda_j)^c،(\lambda_j)^u،(\lambda'_j)^l،(\lambda'_j)^c،(\lambda'_j)^u)$$

فرمول (۲) را با توجه به پارامترهای بالا بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max \Big(\sum_{i=1}^{m}(d_{io})^{l},(d_{io})^{c},(d_{io})^{u})((R_i)^{l},(R_i)^{c},(R_i)^{u}) + (\sum_{k=1}^{K}(R_k)^{l},(R_k)^{c},(R_k)^{u})((b_{ko})^{l},(b_{ko})^{c},(b_{ko})^{u}) + \qquad (2-1)\\
&(\sum_{k=1}^{K}(R_k)^{l},(R_k)^{c},(R_k)^{u})((b'_{ko})^{l},(b'_{ko})^{c},(b'_{ko})^{u}) + \sum_{r=1}^{s}((R_r)^{l},(R_r)^{c},(R_r)^{u})((f_{ro})^{l},(f_{ro})^{c},(f_{ro})^{u})\\
&s.t.\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{l},(\lambda_j)^{c},(\lambda_j)^{u})((x_{ij})^{l},(x_{ij})^{c},(x_{ij})^{u}) + ((d_{io})^{l},(d_{io})^{c},(d_{io})^{u}) = ((x_{io})^{l},(x_{io})^{c},(x_{io})^{u}) \qquad i=1,\dots,m\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{l},(\lambda_j)^{c},(\lambda_j)^{u})((z_{kj})^{l},(z_{kj})^{c},(z_{kj})^{u}) + ((b_{ko})^{l},(b_{ko})^{c},(b_{ko})^{u}) = ((z_{ko})^{l},(z_{ko})^{c},(z_{ko})^{u}) \qquad k=1,\dots,K\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{l},(\lambda'_j)^{c},(\lambda'_j)^{u})((z_{kj})^{l},(z_{kj})^{c},(z_{kj})^{u}) + ((b'_{ko})^{l},(b'_{ko})^{c},(b'_{ko})^{u}) = ((z_{ko})^{l},(z_{ko})^{c},(z_{ko})^{u}) \qquad k=1,\dots,K\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{l},(\lambda'_j)^{c},(\lambda'_j)^{u})((y_{rj})^{l},(y_{rj})^{c},(y_{rj})^{u}) + ((f_{ro})^{l},(f_{ro})^{c},(f_{ro})^{u}) = ((y_{ro})^{l},(y_{ro})^{c},(y_{ro})^{u}) \qquad r=1,\dots,s\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{l},(\lambda_j)^{c},(\lambda_j)^{u}) = ((1)^{l},(1)^{c},(1)^{u}),\ (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{l},(\lambda'_j)^{c},(\lambda'_j)^{u}) = ((1)^{l},(1)^{c},(1)^{u})
\end{aligned}$$

لم: با توجه به این که، $d_{io} = ((d_{io})^{l},(d_{io})^{c},(d_{io})^{u})$، $b_{ko} = ((b_{ko})^{l},(b_{ko})^{c},(b_{ko})^{u})$، $b'_{ko} = ((b'_{ko})^{l},(b'_{ko})^{c},(b'_{ko})^{u})$ $f_{ro} = ((f_{ro})^{l},(f_{ro})^{c},(f_{ro})^{u})$ ، جواب بهینه برای مسئله (۲) می‌باشند. بنابراین مسئله بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
&\max \Big((\sum_{i=1}^{m}R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K}R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K}R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s}R_r f_{ro})^{l}, \qquad (2-2)\\
&(\sum_{i=1}^{m}R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K}R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K}R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s}R_r f_{ro})^{c},(\sum_{i=1}^{m}R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K}R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K}R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s}R_r f_{ro})^{u}\\
&s.t.\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^{l},(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^{c},\ (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + d_{io} = x_{io})^{u} \qquad ;i=1,\dots,m\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^{l},(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^{c},\ (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b_{ko} = z_{ko})^{u} \qquad ;k=1,\dots,K\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^{l},(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^{c},\ (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j z_{kj} + b'_{ko} = z_{ko})^{u} \qquad ;k=1,\dots,K\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^{l},\ (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^{c},\ (\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} + f_{ro} = y_{ro})^{u} \qquad ;r=1,\dots,s\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{l}) = (1)^{l},\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{c}) = (1)^{c},\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda_j)^{u}) = (1)^{u}\\
&\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{l}) = (1)^{l},\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{c}) = (1)^{c},\quad (\sum_{j=1}^{n}((\lambda'_j)^{u}) = (1)^{u}\\
&\quad (d_{io})^{c} - (d_{io})^{l} \ge 0\ \ (d_{io})^{u} - (d_{io})^{c} \ge 0\ \ (d_{io})^{l} \ge 0\\
&\quad (b_{ko})^{c} - (b_{ko})^{l} \ge 0\ \ (b_{ko})^{u} - (b_{ko})^{c} \ge 0\ \ (b_{ko})^{l} \ge 0\\
&\quad (b'_{ko})^{c} - (b'_{ko})^{l} \ge 0\ \ (b'_{ko})^{u} - (b'_{ko})^{c} \ge 0\ \ (b'_{ko})^{l} \ge 0\\
&\quad (f_{ro})^{c} - (f_{ro})^{l} \ge 0\ \ (f_{ro})^{u} - (f_{ro})^{c} \ge 0\ \ (f_{ro})^{l} \ge 0
\end{aligned}$$

در ادامه می‌توان مسئله بالا را با تغییر در مسئله MOLP با سه حلقه کردن تابع‌های هدف در خوش‌بینانه‌ترین، محتمل‌ترین و بدبینانه‌ترین حالات به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\max(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^c \qquad (2-3)$$

$$\max((\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^u - (\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^l)$$

$$\max((\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^l - (\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^u)$$

s.t.

قیدهای مدل (۲-۲)

از روش لکزیکوگراف برای بدست آوردن جواب بهینه در مسئله استفاده می‌شود. مسئله بالا را با روش لکزیکوگراف حل می‌نمائیم. به این حالت محتمل‌ترین حالت گفته می‌شود.

$$\max(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^c \qquad (2-4)$$

s.t.

قیدهای مدل (۲-۲) .

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مسئله به صورت یک مسئله تک هدفه حل می‌شود. از این رو، اگر جواب بهینه یکتا برای $d_{io} = ((d_{io})^l, (d_{io})^c, (d_{io})^u)$، $b_{ko} = ((b_{ko})^l, (b_{ko})^c, (b_{ko})^u)$، $b'_{ko} = ((b'_{ko})^l, (b'_{ko})^c, (b'_{ko})^u)$، $f_{ro} = ((f_{ro})^l, (f_{ro})^c, (f_{ro})^u)$ در مدل (۲-۴) بدست بیاید در ادامه متوقف می‌شویم. این جواب بهینه، جواب بهینه مدل (۲-۱) می‌باشد، در غیر این صورت ما به مرحله بعدی می‌رویم.

در مرحله بعد، مسئله (۲-۵) با ثابت در نظر گرفتن تابع هدف، مدل (۲-۴) حل خواهد شد که آنرا با p'^* نمایش می‌دهیم. p'^*، جواب بهینه تابع هدف برای مسئله (۲-۴) می‌باشد. همان‌طور که می‌بینید ما تابع هدف را به صورت یک محدودیت در مدل بعدی در نظر خواهیم گرفت. این حالت خوش‌بینانه‌ترین حالت گفته می‌شود.

$$\max((\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^u + (\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^l) \qquad (2-5)$$

s.t.

قیدهای مدل (۲-۲) .

$$p'^* = (\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro})^c$$

با توجه به اضافه کردن محدودیت جدید، مدلی که بدست آمده یک مسئله تک هدفه می‌باشد. اگر جواب بهینه یکتا بدست بیاید این جواب بهینه مسئله (۲-۱) می‌باشد، در غیر این صورت تابع هدف مسئله (۲-۵) را به عنوان یک محدودیت به مسئله بعدی اضافه می‌کنیم و آن را به صورت زیر

می‌نویسیم. این حالت در اصطلاح به حالت بدبینانه معروف می‌باشد.

$$\max\left(\left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^u - \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^l\right) \quad (2-6)$$

$$s.t$$

$$p'^{*} = \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^c$$

$$p''^{*} = \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^u + \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^l$$

قیدهای مدل (۲-۲)

تابع هدف سوم، با توجه به اضافه شدن محدودیت‌ها به صورت مسئله تک هدفی حل می‌شود. در نتیجه جواب بهینه مسئله (۲-۱) به وسیله حل مدل بالا بدست می‌آید.

پیوست (۲):

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مدل زیر فازی شده مدل پرایمال- دوآل با شرایط مکمل زائد برای خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت ممکن در (۵-۱) و (۵-۲) نشان داده می‌شود.

$$\max \eta \qquad (5-1)$$

$$s.t.$$

. قیدهای مدل (۵)

$$p'^{*} = \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^c$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^u + \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^l =$$

$$\left(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'_0\right)^u + \left(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'_0\right)^l$$

$$\max \eta \qquad (5-2)$$

$$s.t.$$

$$p'^{\times} = \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^c$$

$$q'^{\times} = \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^u + \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^l$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^u - \left(\sum_{i=1}^{m} R_i d_{io} + \sum_{k=1}^{K} R_k b_{ko} + \sum_{k=1}^{K} R_k b'_{ko} + \sum_{r=1}^{s} R_r f_{ro}\right)^l =$$

$$\left(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'_0\right)^u - \left(-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{k=1}^{K} w_k z_{ko} + \sum_{k=1}^{K} w'_k z_{ko} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 + u'_0\right)^l$$