پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره 3، شماره 1، بهار 1397

روشی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره با تعریف نو از اندازه‌های باور در نظریه دمپستر شافر

فرشته خلج[1]، عین اله پاشا[2*]، رضا توکلی مقدم[3]، مهران خلج[4]

1- دانشجوی دکتری، دانشکده علوم پایه، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
2- استاد، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
3- استاد، دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
4- استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد رباط‌کریم، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

دریافت: 1395/8/4 پذیرش: 1396/7/11

چکیده

تابع تشخیص یا تابع جرم احتمال، نقش مهمی را در نظریه دمپسترشافر ایفا می‌کند. بر اساس این تابع، می‌توان اندازه‌های باور و امکان را برای بیان اطلاعات ناسازگار، متناقض، ناکافی و نامطمئن به دست آورد. معمولاً این اندازه‌ها توسط چندین کارشناس ارائه شده و قابل‌اندازه‌گیری با مقادیر دقیق احتمالی نیستند. در این مقاله، روش تصمیم‌گیری جدیدی برای حل مسائل چندمعیاره، بر اساس تابع تشخیص و اندازه‌های باور، پیشنهاد شده است. سه عنصر اصلی در نظر گرفته‌شده در تابع تشخیص شامل 1- درجه یا اندازه باور از درستی، 2- اندازه عدم باور از نادرستی گزینه و 3- میزان یا درجه عدم قطعیت باور درباره گزینه موردنظر در مجموعه کل گزینه‌ها است. در روش پیشنهادی، فاصله بین اندازه‌های باور توسط کارشناسان متعدد بیان شده و فاصله آن تا حالت ایده‌آل، با استفاده از عملگرهای بیشینه و کمینه محاسبه می‌شود. از فاصله به‌دست‌آمده می‌توان به‌عنوان اندازه بهینه بین هر گزینه و گزینه ایده‌آل به منظور رتبه‌بندی و انتخاب مطلوب‌ترین گزینه استفاده کرد. در این

* نویسنده مسئول مقاله: E-mail: pashaeinollah@yahoo.com

روش، وزن معیارها و وزن سه عنصر تعریف‌شده تابع تشخیص در فرآیند تصمیم‌گیری موردتوجه قرار می‌گیرد. در انتها نیز دو مثال کاربردی برای روش پیشنهادی ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: نظریه دمپستر شافر؛ توابع باور؛ تصمیم‌گیری چندمعیاره.

1- مقدمه

نظریه دمپسترشافر در مورد توابع باور، توسط دمپستر و بر اساس احتمالات بالایی و پایینی پایه‌گذاری شده [1] و سپس توسط شافر بسط داده شده است [2]. این نظریه روشی قدرتمند برای ترکیب شواهد تجمعی از نظرات و ایده‌های متفاوت در مورد شواهد است. نظریه دمپسترشافر در مورد توابع باور، در مقایسه با نظریه احتمال، اطلاعات بیشتری برای حمایت از تصمیم‌گیری به‌وسیله شواهد ناشناخته و نامطمئن در نظر می‌گیرد و سازوکاری برای استخراج راه‌حل‌هایی برای شواهد مبهم و متفاوت، بدون داشتن اطلاعات قبلی و احتمالات پیشین ارائه می‌دهد. این نظریه کاربردهای مؤثر و موفقی را در بسیاری از زمینه‌ها ازجمله کاهش دانش [3]، تشخیص خطا [4]، طبقه‌بندی‌های چندکلاسه [5]، انتخاب عرضه‌کننده [6] و غیره داشته است.

یکی از کاربردهای این نظریه، مطالعاتی است که در زمینه مسائل تصمیم‌گیری با استفاده از ترکیب و توسعه این نظریه با نظریه و روش‌های دیگر، پیشنهاد شده است [7] و [8]. تصمیم‌گیری فرآیند رتبه‌بندی گزینه‌های تصمیم به‌منظور انتخاب بهترین گزینه در میان مجموعه گزینه های ممکن برای انتخاب است. معمولاً در شرایط واقعی، تصمیم‌گیری تحت شرایط عدم قطعیت و اطلاعات ناکافی، نادقیق یا متناقض رخ می-دهد. بنابراین با توجه دقت و مشخصات داده‌های اندازه‌گیری شده و شواهد موجود، روش‌ها و پیشنهادهای متفاوتی برای حل مسائل تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت پیشنهاد یا اختصاص داده شده است. به دلیل طبقه‌بندی عدم قطعیت شناختی (عدم قطعیت قابل‌اندازه گیری) در چهار دسته عمومی 1- تصادفی بودن، 2- ناکافی بودن، 3- نادقیق بودن و 4- متناقض بودن، چارچوب‌های مختلفی برای رتبه‌بندی گزینه‌های

تصمیم و یافتن بهترین راه‌حل در فرآیند تصمیم‌گیری معرفی می‌شوند [9]. نظریه مجموعه فازی و دمپسترشافر دو نظریه معروف برای حل مسائل در شرایط عدم قطعیت هستند [9]. روابط پایه و برخی از ویژگی‌های ساختار ریاضی این نظریه‌ها در [10-14] ارائه شده است.

همان‌طور که بیان شد، ناکامل بودن، نادقیق یا نامعلوم بودن شواهد و داده‌ها وهمچنین کمبود دانش، با عدم قطعیت معرفتی مرتبط است. بنابراین با افزایش داده، اطلاعات و دانش می‌توان نسبت به کاهش این عدم قطعیت برای بهبود تصمیم‌گیری و انتخاب بهترین گزینه اقدام نمود. به‌طورکلی، چارچوب منطق فازی بر اساس اطلاعات نادقیق و نظریه دمپسترشافر برای اطلاعات ناکافی پیشنهاد می‌شود [9]؛ ولیکن بیشتر پژوهش‌های موجود تصمیم‌گیری یا از نظریه فازی استفاده کرده‌اند (به‌عنوان‌مثال ن.ک. [15-19]) یا بر اساس ترکیبی از نظریه دمپسترشافر و نظریه فازی طراحی شده‌اند (به‌عنوان‌مثال ن.ک. [20-22]). با وجود مؤثر بودن روش‌های پیشنهادی بر اساس ارائه روش‌هایی ترکیبی از نظریه دمپسترشافر و سایر روش‌ها برای ارزیابی عدم قطعیت و کاهش آن در زمینه‌های مختلف، این روش‌ها به‌طور مستقیم در چارچوب نظریه دمپسترشافر و بر اساس داده‌های ناکافی و شرایط عدم قطعیت تعریف نشده‌اند. علاوه بر این، در روش‌های مذکور، اختلاف اندازه‌های باور متخصصان در مورد یک هدف یا فرضیه، بر اساس شواهد موجود، به‌عنوان معیار اصلی تصمیم در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین، هدف این مطالعه ارائه چارچوب ریاضی مناسب برای انتخاب بهترین گزینه در فرآیند تصمیم‌گیری، بر اساس شواهد موجود و توابع باور به‌دست‌آمده از منابع مختلف اطلاعاتی (نظر متخصصان) است. توابع باور نقش مهمی در تجزیه‌وتحلیل اطلاعات ناکافی برای انتخاب بهترین گزینه تصمیم‌گیری در این روش دارند. اختلاف بین درجه باورهای مختلف به‌دست‌آمده از منابع مختلف و شواهد موجود -با توجه به باور از درستی، باور از نادرستی یا عدم اطمینان به‌درستی یا نادرستی یک گزاره بر اساس سه تابع باور (باور از درستی، باور نامطمئن و عدم باور از درستی) در چارچوب اصلی نظریه دمپسترشافر- پایه اصلی روش پیشنهادی این مطالعه برای تصمیم‌گیری را تشکیل می‌دهد.

در میان برخی دیگر از منابعی که برای حل مسائل تصمیم‌گیری با استفاده از مفاهیم توابع باور پیشنهاد شده است، می‌توان به کار یانگ در طراحی و ارائه ساختار باور به‌منظور توسعه و تجزیه‌وتحلیل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه اشاره کرد [23]. همچنین یانگ و سن[1] با استفاده از رویکرد استدلال شواهد، مدل توسعه‌یافته‌ای را برای ارزیابی مدل کیفی در شرایط عدم قطعیت و بر پایه نظریه تصمیم و نظریه دمپسترشافر در مورد شواهد پیشنهاد کرده‌اند [24]. کاباک و ریونس[2] ارزیابی معیارهای تصمیم توسط کارشناسان و باور آنها از درستی گزینه های تصمیم را در قالب ساختار ریاضی باور بیان کردند [25] و [26]. ازآنجایی‌که شرح اطلاعات متفاوت و متناقض بر اساس میزان و درجه باور از شواهد موجود در مطالعات تصمیم‌گیری، یکی از مفاهیم اساسی است که با استفاده از نظریه دمپسترشافر می‌توان آن را شرح داد، بنابراین در این مطالعه، روشی جدید برای تصمیم‌گیری چندمعیاره بر پایه درجه‌های باور، پیشنهاد شده است. بدین منظور، ابتدا، توابع باور در قالب و مقیاسی متفاوت از سایر تحقیقات تعریف شده‌اند. این تعریف برگرفته از تعاریف و الگوی توابع عضویت در نظریه فازی و مجموعه فازی شهودی به‌عنوان بسطی از نظریه فازی است [27] و [28]. سپس روش تصمیم‌گیری چندمعیاره جدیدی با استفاده از عملگرهای بیشینه و کمینه[3] و با پایه‌گذاری روش تصمیم‌گیری چندمعیاره‌ای بر اساس اندازه‌های باور، پیشنهاد می‌شود.

ترتیب بخش‌های مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، مفاهیم پایه‌ای از نظریه دمپسترشافر آورده شده و در بخش سوم، ابتدا بر اساس مفاهیم تعریف‌شده از نظریه دمپسترشافر، شکل جدیدی از مقادیر باور در قالب مجموعه باور بر اساس اندازه و درجه باور از پیشامدها، ارائه می‌شود. در ادامه و در بخش چهارم، فاصله بین دو مجموعه باور به‌عنوان پایه‌ای برای ایجاد چارچوب تصمیم‌گیری چندمعیاره ارائه می‌شود؛ سپس، گزاره‌های تعریف‌شده‌ای با استفاده از عملگرهای بیشینه و کمینه، به همراه اثبات، آورده می‌شود. در بخش پنجم، روش تصمیم‌گیری جدیدی بر اساس مجموعه باور تعریف‌شده در بخش سوم و گزاره‌های ارائه‌شده در بخش

1. Yang & Sen.
2. Kabak & Ruan.
3. Maximum and Minimum

چهارم، پیشنهاد می‌شود. در بخش 6، با مثالی کاربردی، کارایی و چگونگی حل مسائل چندمعیاره پیشنهادی با توجه به اندازه‌های باور، نشان داده می‌شود. در انتها نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادها آورده شده‌اند.

2- مفاهیم پایه در نظریه دمپسترشافر یا توابع باور

تعریف 2-1: چارچوب تشخیص در نظریه دمپسترشافر، مجموعه‌ای از عناصر یا گزاره‌های دوبه‌دو مجزا است و اگر مجموعه $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از عناصر یا گزاره‌ها باشد، فضای نمونه یا چارچوب تشخیص به‌صورت $\Omega = 2^X$ نمایش داده می‌شود و این مجموعه، مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های X به‌صورت $\Omega = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\}$ است.

تعریف 2-2: اگر $A_1 = \{x_1\}$، $A_2 = \{x_2\}$ و.... مجموعه‌های متعلق به چارچوب تشخیص باشند، تابع جرم احتمال یا تابع تشخیص مجموعه A_i روی چارچوب تشخیص، به‌صورت $m(A_i)$ نمایش داده می‌شود که دارای شرایط زیر است:

$$m(A_i) \geq 0 \text{ و } A_i \in \Omega \tag{1}$$

$$m(\emptyset) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{A \in 2^X} m(A_i) = 1 \tag{3}$$

تعریف 2-3: دقیق ترین باوری که از درستی یا رخداد مجموعه A از چارچوب تشخیص و بر اساس شواهد موجود، به دست می آید را تابع باور می نامند. این تابع مجموع جرم احتمال‌های تعیین‌شده برای عناصری است که در مجموعه A وجود دارد و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$bel(A) = \sum_{A_i \subseteq B} m(B) \quad (4)$$

برخلاف نظریه احتمال، $bel(A) = 0$ به معنای کمبود شواهد درباره مجموعه A است؛ درحالی‌که $P(A) = 0$ به معنای ناممکن بودن این مجموعه بوده و این در حالی است که $bel(A) = 1$ به معنای اطمینان از رخداد پیشامد A و مشابه با احتمال $P(A) = 1$ است که به معنای اطمینان از درست بودن مجموعه A است.

تعریف 2-4: بیشینه باور ممکن برای درستی مجموعه A را که بر اساس شواهد تعیین می‌شود، تابع امکان می‌نامند. این تابع مجموع کل جرم‌های احتمال عناصر موجود چارچوب تشخیص است که اشتراک آن با مجموعه A مخالف صفر است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$pl(A) = \sum_{A_i \cap B \neq \phi} m(B) \quad (5)$$

مقدار امکان مجموعه A می‌تواند به‌صورت متمم باور نبودن A یا به‌عبارت‌دیگر، نبودن شواهدی مبنی بر درستی A به‌صورت زیر تعریف شود:

$$pl(A) = 1 - bel(\sim A) \quad (6)$$

$pl(A) = 0$ به معنای ناممکن بودن مجموعه A یا به‌طور مشابه $P(A) = 0$ است. همچنین $pl(A) = 0$ معادل است با $bel(\sim A) = 1$؛ به معنای اینکه اگر رخداد A بر اساس شواهد ناممکن باشد، مطمئنا A درست نیست.

تعریف 2-5: میزان عدم قطعیت یا درجه تردید در تعیین اندازه باور و امکان بر اساس شواهد موجود، فاصله بین باور رخداد یا درستی مجموعه A و عدم باور

از رخداد یا نادرستی مجموعه A در چارچوب تشخیص است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u = 1 - bel(A) - bel(\sim A) \tag{7}$$

3- تعاریف پیشنهادی بر اساس مفاهیم توابع باور

تعریف 3-1: فرض کنید $A \in \Omega$، مجموعه S با توجه به تعاریف (2-1) تا (2-4) در بخش قبل و با استفاده از اندازه‌های باور $bel(A)$، $u(A)$ و $bel(\sim A)$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \left\{(bel(A), u(A), bel(\sim A) | A \in \Omega)\right\} \tag{8}$$

به‌طوری‌که برای هر مجموعه A از چارچوب تشخیص، $bel(\sim A) \in [0,1]$ و $u(A)$ و $bel(A)$ بوده و مجموع آن‌ها برای $A \in \Omega$ به‌صورت زیر است:

$$0 \leq bel(A) + u(A) + bel(\sim A) \leq 1 \tag{9}$$

مثال 3-1: فرض کنید کارشناسی در بررسی اسناد و مدارک معاملات بر این باور است که در صورت رخ دادن انجام معامله و فروش خودرو اختلاف سود کارخانه 0/6 است و در صورت عدم فروش و عدم انجام این معامله، سود 0/2 است؛ در این حالت، تابع جرم احتمال یا تابع تشخیص بر اساس شواهد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$m(A) = 0.6, \quad m(\sim S) = 0.2, \quad m(S, \sim S) = 0.2$$

$m(S) = 0.6$ ، درجه باور از درستی گزینه S، رخداد معامله یا سود ده بودن معامله به میزان 0/6 در مقیاس صفر و یک است. $m(\sim A) = 0.2$ درجه عدم باور از درستی یا رخداد معامله سود دِه به میزان 0/2 در مقیاس صفر و یک خواهد بود.

همچنین $m(S,\sim S) = 0.2$ میزان عدم قطعیت یا خطای تشخیص در باور به وجود آمده از رخداد معامله بر اساس شواهد، به میزان 0/2 است.

مثال 3-2: با توجه به تعریف (3-2) و (4-2)، توابع باور و امکان بر اساس تابع جرم احتمال یا تابع تشخیص تعیین‌شده در مثال 3-1 به شرح زیر است:

$$bel(A) = m(A) = 0.6,$$
$$bel(\sim A) = m(\sim A) = 0.2, \quad bel(u) = m(A,\sim A) = 0.2$$
$$pl(A) = m(A) + m(A,\sim A) = 0.6 + 0.2 = 0.8 = 1 - bel(\sim A) = 1 - 0.2 = 0.8$$
$$pl(\sim A) = m(\sim A) + m(A,\sim A) = 0.2 + 0.2 = 0.4 = 1 - bel(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

تعریف 3-2: مجموعه مکمل S_i یا S_i^C به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^c = \left\{(bel(\sim A), 1 - u(A), bel(A) | A \in \Omega)\right\} \tag{10}$$

تعریف 3-3: برای دو مجموعه A و B از چارچوب تشخیص Ω، رابطه $A \subseteq B$ برقرار است، اگر و تنها اگر $bel_A(x) \leq bel_B(x)$، $u_A(x) \geq u_B(x)$ و $bel_x(\sim x) \geq bel_B(\sim x)$ برای هر $x \in \Omega$ برقرار باشد.

4- فاصله بین اندازه‌های باور

در این بخش به‌منظور پایه‌گذاری روش تصمیم‌گیری چندمعیاره، ابتدا تعاریفی در زمینه اندازه باور بر اساس عملگرهای بیشینه (حداکثر) و کمینه (حداقل) پیشنهاد می‌شوند؛ سپس، ویژگی‌های آن‌ها در قالب گزاره‌هایی بررسی و اثبات می‌شود.

تعریف 4-1: شباهت یا اندازه فاصله بین دو زیرمجموعه A و B از چارچوب تشخیص Ω را به‌صورت $D(A,B)$ با شرایط زیر تعریف می‌کنیم:

$$0 \le D(A,B) \le 1 \quad (11)$$

$$D(A,B) = 1 \; if \, A{=}B \quad (12)$$

$$D(A,B) = D(B,A) \quad (13)$$

$D(A,C) \le D(A,B)$ و $D(A,C) \le D(B,C)$ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ (14)

تعریــف 4-2: اگــر A و B دو مجموعــه از چــارچوب تشــخیص Ω باشــند، آنگــاه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \left\{ (bel_A(x), u_A(x), bel_A(\sim x) | x \in \Omega) \right\} \quad (15)$$

$$B = \left\{ (bel_B(x), u_B(x), bel_B(\sim x) | x \in \Omega) \right\} \quad (16)$$

به‌طوری‌که $bel_A(x), u_A(x), bel_A(\sim x), bel_B(x), u_B(x), bel_B(\sim x) \in [0,1]$ برای هر $x \in \Omega$. فاصله بین دو زیرمجموعه A و B از چــارچوب تشــخیص Ω بــه‌صــورت زیــر تعریف می‌شود:

$$D_1(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\min(bel_A(x_i), bel_B(x_i))}{\max(bel_A(x_i), bel_B(x_i))} + \frac{\min(u_A(x_i), u_B(x_i))}{\max(u_A(x_i), u_B(x_i))} + \frac{\min(bel_A(\sim x_i), bel_B(\sim x_i))}{\max(bel_A(\sim x_i), bel_B(\sim x_i))} \quad (17)$$

گزاره 1: فرض کنید A و B دو مجموعه از چارچوب تشخیص Ω باشند. مطـابق بـا تعریف 4-1، $D_1(A,B)$ باید دارای شرایط زیر باشد:

$$0 \leq D_1(A,B) \leq 1 \tag{18}$$

$$D_1(A,B) = 1 \text{ if A=B} \tag{19}$$

$$D_1(A,B) = D_1(B,A) \tag{20}$$

اگر $A \subseteq B \subseteq C$ $D_1(A,C) \leq D_1(B,C)$ و $D_1(A,C) \leq D_1(A,B)$ (21)

اثبات گزاره 1: به‌سادگی مشاهده می‌شود که رابطه 18 تا 20 برقرار است؛ بنابراین، تنها رابطه 21 را اثبات می‌کنیم:

فرض کنید $A \subseteq B \subseteq C$؛ بنابراین $bel_A(x_i) \leq bel_B(x_i) \leq bel_C(x_i)$ و $u_A(x_i) \geq u_B(x_i) \geq u_C(x_i)$ و $bel_A(\sim x_i) \geq bel_B(\sim x_i) \geq bel_B(\sim x_i)$ برای هر $x_i \in \Omega$. بر اساس این نامساوی‌ها روابط زیر را داریم:

$$D_1(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{bel_A(x_i)}{bel_B(x_i)} + \frac{u_B(x_i)}{u_A(x_i)} + \frac{bel_B(\sim x_i)}{bel_A(\sim x_i)}) \tag{22}$$

$$D_1(A,C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{bel_A(x_i)}{bel_C(x_i)} + \frac{u_C(x_i)}{u_A(x_i)} + \frac{bel_C(\sim x_i)}{bel_A(\sim x_i)}) \tag{23}$$

$$D_1(B,C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{bel_B(x_i)}{bel_C(x_i)} + \frac{u_C(x_i)}{u_B(x_i)} + \frac{bel_C(\sim x_i)}{bel_B(\sim x_i)}) \tag{24}$$

اگر $A \subseteq B \subseteq C$ $D_1(A,C) \leq D_1(B,C)$ و $D_1(A,C) \leq D_1(A,B)$ (25)

ازآنجایی‌که $\frac{bel_A(x_i)}{bel_C(x_i)} \geq \frac{bel_A(x_i)}{bel_B(x_i)}$ و $\frac{u_C(x_i)}{u_A(x_i)} \geq \frac{u_B(x_i)}{u_A(x_i)}$ و $\frac{bel_C(\sim x_i)}{bel_A(\sim x_i)} \geq \frac{bel_B(\sim x_i)}{bel_A(\sim x_i)}$، می‌توان بدست آورد که $D_1(A,C) \leq D_1(A,B)$. به‌طور مشابه، $\frac{bel_A(x_i)}{bel_C(x_i)} \geq \frac{bel_B(x_i)}{bel_C(x_i)}$ و

$\frac{u_C(x_i)}{u_A(x_i)} \geq \frac{u_C(x_i)}{u_B(x_i)}$ و $\frac{bel_C(\sim x_i)}{bel_A(\sim x_i)} \geq \frac{bel_C(\sim x_i)}{bel_B(\sim x_i)}$ ؛ لـذا داریـم $D_1(A,C) \leq D_1(B,C)$. در نتیجـه، رابطه 21 نیز برقرار است و اثبات به پایان می رسد.

اگر اهمیت تفاوت‌ها در سه عنصر تابع باور، تـابع عـدم قطعیـت و تـابع عـدم بـاور تعریف‌شده در رابطه 17 قابل‌توجه باشد، نیاز اسـت کـه سـه عبـارت مسـتقل در ایـن رابطه در نظر گرفته شود؛ به‌طوری‌که بر اساس آن می‌توان این رابطـه را بـه‌صـورت زیر توسعه داد:

$$D_2(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha\frac{\min(bel_A(x_i),bel_B(x_i))}{\max(bel_A(x_i),bel_B(x_i))} + \beta\frac{\min(u_A(x_i),u_B(x_i))}{\max(u_A(x_i),u_B(x_i))} + \gamma\frac{\min(bel_A(\sim x_i),bel_B(\sim x_i))}{\max(bel_A(\sim x_i),bel_B(\sim x_i))} \tag{26}$$

به‌طوری‌که α، β و γ وزن‌های سه عنصر مستقل، یعنی تابع باور، تابع عدم قطعیت و تابع عدم باور مـی‌باشـد و $\alpha + \beta + \gamma = 1$؛ بخصـوص وقتـی $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$، رابطه 26 به معادله 17 تبدیل می‌شود.

اندازه فاصله اندازه $D_2(A,B)$ نیز با استفاده گزاره زیر، تعریف می‌شود:

گزاره 2: فرض کنید A و B زیرمجموعه‌ای از چارچوب تشـخیص Ω اسـت. انـدازه فاصله $D_2(A,B)$، تعریـف‌شـده در رابطـه 26 بـا توجـه بـه ویژگـی‌هـای زیـر تعریـف می‌شود:

$$0 \leq D_2(A,B) \leq 1 \tag{27}$$

$$D_2(A,B) = 1 \ if A=B \tag{28}$$

$$D_2(A,B) = D_2(B,A) \tag{29}$$

$D_2(A,C) \leq D_2(A,B)$ و $D_2(A,C) \leq D_2(B,C)$ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ (30)

اثبات گزاره 2: مشابه با اثبات گزاره 1، می‌توان ثابت کرد که شرایط تعریف‌شده در رابطه‌های 11 تا 14 در گزاره 2 نیز برقرار است. علاوه بر این، اگر فاصله‌ها در عناصر اهمیت دارد، لازم است که وزن هر عنصر را محاسبه کنیم. بنابراین فاصله وزن‌دار شده بین دو زیرمجموعه A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شود. اگر $w_i \in [0,1]$ برای هر $i = \{1,2,\dots,n\}$ و $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ باشد، فاصله وزن‌دار شده به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_3(A,B) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha \frac{\min(bel_A(x_i), bel_B(x_i))}{\max(bel_A(x_i), bel_B(x_i))} + \beta \frac{\min(u_A(x_i), u_B(x_i))}{\max(u_A(x_i), u_B(x_i))} + \gamma \frac{\min(bel_A(\sim x_i), bel_B(\sim x_i)}{\max(bel_A(\sim x_i), bel_B(\sim x_i)}) \quad (31)$$

به‌طور مشابه اندازه وزن‌های $D_3(A,B)$ نیز مانند گزاره زیر است:

گزاره 3: فرض کنید A و B زیرمجموعه از چارچوب تشخیص Ω است. اندازه فاصله $D_3(A,B)$، در رابطه 31 تعریف شده است. بنابراین باید ویژگی‌های زیر برقرار باشد:

$$0 \le D_3(A,B) \le 1 \quad (32)$$

$$D_3(A,B) = 1 \; if \; A=B \quad (33)$$

$$D_3(A,B) = D_3(B,A) \quad (34)$$

$\mathrm{D_3(A,C) \le D_3(A,B)}$ و $\mathrm{D_3(A,C) \le D_3(B,C)}$ اگر $\mathrm{A \subseteq B \subseteq C}$ (35)

مشابه با اثبات گزاره اول، می‌توان اثبات کرد که ویژگی‌های تعریف‌شده در رابطه‌های 11 تا 14 برای اندازه وزن‌های $D_3(A,B)$ برقرار است. اگر $w = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)^T$، معادله 31 به‌صورت رابطه 26 می‌شود.

5- روش تصمیم‌گیری با استفاده از اندازه وزن‌دار شده

در این بخش، یک روش تصمیم‌گیری چندمعیاره بر اساس مقایسه اندازه‌های باور وزن‌دار شده ارائه می‌شود:

فرض کنید $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ گزینه‌های ممکن و $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ مجموعه معیارهای موردنظر برای گزینه‌ها باشد. فرض کنید وزن معیارها C_j $(j = 1,2, \dots, n)$، w_j باشد و با مقادیر $w_j \in [0,1]$ است و $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ و وزن سه متغیر مستقل (یعنی تابع باور، تابع عدم قطعیت و تابع عدم باور) در اندازه‌های باور α و β و γ باشد؛ بطوریکه $\alpha + \beta + \gamma = 1$ است و به‌وسیله تصمیم‌گیرندگان ارائه می‌شود. در این مورد، تشخیص گزینه‌های A_i $(i = 1,2, \dots, m)$ روی ویژگی‌های C_j $(j = 1,2, \dots, n)$ به‌وسیله شکلی از اندازه‌های باور به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{A}_i = \left\{\left(bel_{A_i}(C_j), u_{A_i}(C_j), bel_{A_i}(\sim C_j)\middle| C_j \in C\right)\right\} \tag{36}$$

به‌طوری‌که $bel_{A_i}(C_j), u_{A_i}(C_j), bel_{A_i}(\sim C_j) \in [0,1]$ و $0 \leq bel_{A_i}(C_j) + u_{A_i}(C_j) + bel_{A_i}(\sim C_j) \leq 1$ برای $C_j \in C$، $(j = 1,2, \dots, n)$ و $(i = 1,2, \dots, m)$.

برای راحتی، سه مؤلفه $bel_{A_i}(C_j), u_{A_i}(C_j), bel_{A_i}(\sim C_j)$ تعیین‌شده توسط هر کارشناس یا تصمیم‌گیرنده را برای گزینه i ام با توجه به معیار j ام به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_{ij}(x) = (bel_{ij}(x), u_{ij}(x), bel_{ij}(\sim x)) \tag{37}$$

ازاین‌رو، می‌توان ماتریس تصمیم مقادیر $D = (a_{ij})_{m\times n}$ را به‌صورت زیر را تشکیل داد:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{38}$$

به‌منظور بررسی و انتخاب بهترین گزینه بر اساس فاصله‌های اندازه‌های باور با اندازه ایده‌آل در ماتریس تصمیم‌گیری، نقطه ایده‌آل با ویژگی‌های ارزیابی را در دو دسته ویژگی‌های سودمند و ویژگی‌های هزینه‌زا تقسیم می‌کنیم. بنابراین فرض کنید H مجموعه‌ای از معیارهای سودمند و L مجموعه‌ای از معیارهای هزینه باشد. در روش ارائه‌شده برای تصمیم‌گیری، یک گزینه ایده‌آل می‌تواند با استفاده از عملگرهای بیشینه برای معیارهای سودمندی و عملگرهای کمینه قابل‌استفاده برای معیارهای هزینه تعیین شود. بنابراین از این روش می‌توان برای تعیین بهترین مقدار از هر معیاری در میان گزینه‌ها استفاده کرد. بر این اساس، یک اندازه باور برای ایده‌آل‌ترین معیار سود در بین گزینه‌ها A^* است که برای $j \in H$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_j^*(x) = \left(bel_j^*(x), u_j^*(x), bel_j^*(\sim x)\right) = (\max_i(bel_{ij}(x)), \min_i((u_{ij}(x)), \min_i(bel_{ij}(\sim x)) \tag{39}$$

درحالی‌که برای معیار هزینه، یک اندازه باور ایده آل گزینه‌های ایده آل برای A^* و $j \in L$ به‌صورت زیر است:

$$D_4(A_i, A^*) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\alpha \frac{\min(bel_{ij}(x), bel_j^*(x))}{\max((bel_{ij}(x), bel_j^*(x))} + \beta \frac{\min((u_{ij}(x), u_j^*(x))}{\max((u_{ij}(x), u_j^*(x))} + \gamma \frac{\min(bel_{ij}(\sim x_i), bel_j^*(\sim x_i)}{\max(bel_{ij}(\sim x_i), bel_j^*(\sim x_i)}) \tag{40}$$

به‌طوری‌که ارزیابی کلی برای گزینه‌های در نظر گرفته شده، با توجه به معیارها می‌باشد. مطابق با اندازه وزن بین هر گزینه و گزینه ایده‌آل، بزرگ‌ترین مقدار اندازه $D_4(A_i, A^*)$، $(i = 1,2,3,4)$ است که بهترین گزینه A_i است. ازاین‌رو، رتبه‌بندی کل گزینه‌ها می‌تواند تعیین شود و بهترین گزینه از بین آن‌ها انتخاب شود.

6- مثال کاربردی

در این بخش دو مثال کاربردی برای مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره با مقادیر باور برای نشان دادن ساختار کاربرد و اثربخشی این روش پیشنهادی برای تصمیم‌گیری ارائه می‌شود:

مثال 6-1: فرض کنید یک شرکت سرمایه‌گذاری خواستار سرمایه‌گذاری کل پولش در بهترین محل موردنظر (گزینه) است. هیئت‌مدیره باید تصمیم بگیرد از بین چهار گزینه ممکن برای سرمایه‌گذاری پول، کدام‌یک را انتخاب کند. گزینه اول یا A_1، یک شرکت خودروسازی، گزینه دوم یا A_2 یک شرکت مواد غذایی، گزینه سوم یا A_3 شرکت کامپیوتری و گزینه آخر یا A_4، شرکت تولیدکننده قطعات ماشین‌های صنعتی است. شرکت سرمایه‌گذار باید تصمیمی مناسب را مطابق با سه معیار زیر اتخاذ نماید:

معیار اول یا C_1 میزان حداقل ریسک، معیار دوم یا C_2 میزان رشد سرمایه و معیار آخر یا C_3 اثرات محیطی است؛ به‌طوری‌که معیارهای C_1 و C_2 سودمند و معیار C_2 معیار هزینه‌ای است. بردار وزن سه معیار به‌صورت (0.4,0.25,0.35) است. چهار گزینه طرح شده برای انتخاب در فرآیند تصمیم گیری نیز بر اساس سه ویژگی بر اساس اندازه‌های باور ارزیابی می‌شوند. بعبارتی اندازه باور برای هر یکی از گزینه ها و معیارها به دست می‌آید.

اندازه‌های باور برای ارزیابی یک گزینه A_i $(i = 1,2,3,4)$ با توجه به معیار C_j $(j = 1,2,3,4)$ بر اساس تجربه کارشناسان ارائه شده است. برای مثال وقتی نظر کارشناسی در ارتباط با گزینه اول یعنی A_1 یا شرکت خودروسازی با توجه به معیار C_1، یعنی میزان ریسک این سرمایه‌گذاری سؤال می‌شود و او بر اساس تجارب قبلی مقادیر باور (0.4,0.35,0.25) را بیان می‌کند، بدین معنا است که باور مثبت او از این سرمایه‌گذاری 0/4، میزان عدم قطعیتش 0/35 و باور منفی یا عدم باور او از موفقیت‌آمیز بودن این باور 0/25 است. بنابراین وقتی چهار گزینه ممکن با توجه به سه معیار موردنظر وجود دارد، ماتریس اندازه‌های باور به‌دست‌آمده، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D = \begin{pmatrix} (0.4,0.35,0.25) & (0.45,0.25,0.3) & (0.8,0.1,0.1) \\ (0.6,0.2,0.2) & (0.6,0.1,0.3) & (0.7,0.1,0.2) \\ (0.35,0.25,0.4) & (0.5,0.15,0.35) & (0.5,0.3,0.2) \\ (0.65,0.15,0.2) & (0.6,0.2,0.2) & (0.5,0.25,0.25) \end{pmatrix}$$

برای حل این مسئله تصمیم‌گیری با در نظر گرفتن مقادیر وزن یا درجه اهمیت برابر سه مؤلفه تعریف‌شده برای اندازه‌های باور، به‌صورت $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$، ابتدا ایده‌آل‌ترین اندازه‌های باور را با توجه به رابطه 39 از ماتریس تصمیم D به دست می‌آوریم. گزینه ایده‌آل به‌صورت زیر است:

$$A^*(x) = \left(bel_j^*(x), u_j^*(x), bel_j^*(\sim x)\right) = ((0.7,0,0.3), (0.6,0.1,0.3), (0.5,0.3,0.25))$$

سپس به‌وسیله رابطه 40 فاصله بین اندازه‌های باور حالت ایده آل را با معیارهای گفته‌شده برای هریک از گزینه ها را به دست می‌آوریم. نتایج به‌صورت زیر است:
$D_4(A_i, A^*)$، $(i = 1,2,3,4)$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned} D_4(A_1, A^*) &= 0.571 \\ D_4(A_2, A^*) &= 0.82149 \\ D_4(A_3, A^*) &= 0.693462 \\ D_4(A_4, A^*) &= 0.927778 \end{aligned}$$

بنابراین رتبه‌بندی چهار گزینه به‌صورت $A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$ بوده و گزینه A_4 به‌عنوان بهترین گزینه در میان گزینه‌ها برای سرمایه‌گذاری انتخاب می‌شود. گزینه A_4 یا شرکت تولیدکننده قطعات ماشین‌های صنعتی بر اساس معیارهای سود ده (داشتن حداقل ریسک و رشد سرمایه) و زیان‌ده (اثرات مخرب محیطی)، بر اساس نظرات کارشناسان، شواهد و مدارک موجود بهترین گزینه برای سرمایه‌گذاری در بین چهار شرکت موردنظر است.

مثال 6-2: در مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره‌ای، فرض کنید کارخانه‌ای می‌خواهد بهترین تولیدکننده را بر اساس یک سری صلاحیت‌های کلیدی تعیین نماید. فرض کنید

مجموعه‌ای از چهار تولیدکننده $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ با چهار ویژگی (C_1, C_2, C_3, C_4) وجود دارد؛ بطوریکه این عوامل به ترتیب 1- سطح نوآوری در فناوری (C_1)، 2- توانایی کنترل روند کار (C_2)، 3- توانایی مدیریتی (C_3) و 4- سطح سرویس‌دهی (C_4) بوده و همه این معیارها سود ده باشند. بردار وزن برای چهار ویژگی به‌صورت $w = (0.35,0.2,0.25,0.2)$ است. چهار گزینه ممکن برای ارزیابی ویژگی‌های فوق به‌وسیله اندازه‌های باور، به دست آمده و ارزیابی یک گزینه A_i $(i = 1,2,3,4)$ با توجه به ویژگی C_j $(j = 1,2,3,4)$ به‌وسیله روش ارزیابی مثال قبل یعنی بر اساس نظر و تجربه پیشین کارشناسان خبره است. برای مثال، وقتی نظر یک کارشناس درباره گزینه A_1 را نسبت به معیار C_1 بخواهیم، باور کارشناس در رابطه با اینکه این گزینه نسبت به معیار، خوب و مناسب باشد، معادل 0/5، عدم اطمینان و باور او نسبت به مناسب بودن این معیار و گزینه 0/2 و میزان عدم قطعیت او از باور اعلام‌شده، 0/3 است. این مقادیر براساس رابطه 8 به‌صورت $a_{11} = (0.5, 0.3,0.2)$ بیان می‌شود. در این مثال، با توجه به چهار گزینه ممکن و چهار ویژگی یا معیار در نظر گرفته می‌شود. ماتریس مقادیر باور توسط کارشناسان به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$D = \begin{pmatrix} (0.5,0.25,0.25) & (0.5,0.1,0.4) & (0.6,0.2,0.2) & (0.4,0.35,0.25) \\ (0.45,0.3,0.25) & (0.3,0.3,0.4) & (0.4,0.1,0.5) & (0.5,0.2,0.3) \\ (0.6,0.3,0.1) & (0.5,0.2,0.3) & (0.5,0.3,0.2) & (0.45,0.35,0.3) \\ (0.7,0.0,0.3) & (0.45,0.25,0.3) & (0.6,0.25,0.15) & (0.65,0.2,0.15) \end{pmatrix}$$

در این مثال، مقادیر وزن‌های سه متغیر تعریف شده برای اندازه تابع تشخیص، تابع یا میزان باور، میزان عدم قطعیت و میزان یا درجه عدم باور، به‌صورت $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، روش تصمیم‌گیری پیشنهادشده برای حل مسئله انتخاب تولیدکننده برتر به کار برده می‌شود. از ماتریس تصمیم تابع تشخیص می‌توان گزینه ایده‌آل را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$A^* = \{(C_1, 0.7,0.0,0.25), (C_2, 0.5,0.1,0.3), (C_3, 0.6,0.1,0.15), (C_4, 0.65,0.2,0.15)\}$

با استفاده از معادله 40، مقادیر اندازه وزن‌ها بین هر گزینه A_i $(i = 1,2,3,4)$ و گزینه ایده‌آل A^* به‌صورت زیر است:

$D_4(A_1, A^*) = 0.619954$

$D_4(A_2, A^*)$ =0.54906
$D_4(A_3, A^*)$ =0.660638
$D_4(A_4, A^*)$ =0.708889

بر اساس اندازه مقادیر به‌دست‌آمده، رتبه‌بندی چهار تولیدکننده به‌صورت $A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2$ و ازاین‌رو، بهترین گزینه A_4 است. بنابراین، تولیدکننده A_4 بر اساس مدارک و شواهد موجود، بهترین تولیدکننده با توجه به ویژگی‌های سطح نوآوری در فناوری، توانایی کنترل فرآیند کاری، توانایی مدیریتی و میزان ارائه خدمات خواهد بود.

بر اساس دو مثال ارائه‌شده، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی برای تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره در کاربردهای مهندسی و شرایط واقعی که همراه با عدم قطعیت است، می‌تواند راهکار مناسب و کاربردی برای حل مسائل با اطلاعات نسبتاً مبهم، متناقض و ناکافی باشد. به‌خصوص در روش تصمیم‌گیری چندمعیاره پیشنهادی، میزان اهمیت سه اندازه مستقل از درجه باور معرفی‌شده (درجه باور از درستی، درجه عدم قطعیت و درجه باور از نادرستی گزینه‌ها) نیز درنظر گرفته شد. بنابراین، روش تصمیم‌گیری چندمعیاره با استفاده از اندازه‌های باور می‌تواند به‌عنوان چارچوب تصمیم‌گیری انعطاف‌پذیر و کاربردی به کار برده شود و راه‌حلی جدید را برای افراد تصمیم‌گیرنده مهیا کند.

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای یافتن راه‌حل مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره، بر اساس نظریه دمپسترشافر و اندازه‌های باور، تعریف جدیدی از اندازه باورها با استفاده از تابع جرم احتمال یا تابع تشخیص در این نظریه ارائه شد و اندازه‌های باور به‌صورت بردار سه‌تایی از میزان درستی باور یا تحقق پیشامد موردنظر از چارچوب تشخیص، میزان یا درجه عدم باور از تحقق پیشامد در چارچوب تشخیص و میزان عدم قطعیت یا درجه تردید نشان داده شده‌اند. در رویکرد پیشنهادی، باور متخصصان و تصمیم‌گیرندگان نسبت به‌درستی/نادرستی/عدم قطعیت از درستی یا نادرستی

گزینه‌های مختلف بر اساس معیارهای تعیین‌شده در فرآیند تصمیم‌گیری بیان می‌شود؛ بطوریکه این مقادیر بر اساس اطلاعات نادقیق، ناکافی و متناقض ارائه‌شده از باورها، مشاهدات و تجربیات گذشته منابع مختلف اطلاعاتی یا کارشناسان متعدد به دست آمده است. سپس با استفاده از اندازه شباهت، اندازه‌های باور به‌دست‌آمده (در قالب مجموعه باور) برای هر گزینه و معیارهای تعیین‌شده با یکدیگر مقایسه می‌شوند. اندازه‌گیری شباهت بین مجموعه‌های باور با استفاده از اختلاف و فاصله بین مجموعه‌های باور و عملگرهای بیشینه و کمینه پیشنهاد شده است. بر این اساس، عملگرهای بیشینه و کمینه، شباهت و شباهت وزن‌دار شده مجموعه‌های باور در قالب گزاره‌هایی اثبات شده است. همان‌طور که در مثال‌ها قابل‌مشاهده است، بنا به نوع کاربرد و مسئله موردبررسی، ارزیابی اختلاف یا فاصله بین مجموعه باورها نسبت به یکدیگر یا نسبت به حالت ایده‌آل، می‌تواند به‌عنوان معیاری مناسب برای بررسی و رتبه‌بندی گزینه‌ها و معیارهای مختلف در فرآیند تصمیم‌گیری استفاده شود. علاوه بر این، مثال‌های ارائه‌شده، سادگی و مفید بودن روش پیشنهادی برای حل تصمیم‌گیری چندمعیاره در شرایط عدم قطعیت بر اساس اندازه‌های باور را نشان می‌دهد.

به‌طورکلی، می‌توان گفت در شرایطی که لازم است بر اساس چند منبع اطلاعاتی و شواهد موجود، در شرایط عدم قطعیت تصمیم‌گیری شود، نظریه دمپسترشافر و اندازه‌های باور معرفی‌شده در این مقاله می‌تواند ساختاری کاربردی و انعطاف‌پذیر را برای رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌های تصمیم، با توجه به وزن تعیین‌شده برای معیارها، فراهم نماید. ازآنجایی‌که معمولاً حل مسائل تصمیم‌گیری در شرایط واقعی بر اساس شرایط موجود و نظر خبرگان است، به نظر می‌رسد استفاده از اندازه‌های باور و وزن‌های تعیین‌شده برای معیارها، بر اساس میزان اثر یا اهمیت آن‌ها در تصمیم‌گیری، منجر به بیان دقیق‌تر شرایط تصمیم‌گیری (گزینه‌ها و معیارهای موردبررسی) در محاسبات شده و ابهام و عدم قطعیت را با استفاده از ساختار قدرتمند نظریه دمپسترشافر اندازه‌گیری نموده و منجر به افزایش دقت نتایج می‌شود.

8- منابع

[1] Dempster AP. Upper and lower probabilities introduced by multivalued mappings. Annals of the institute of statistical mathematics 1967; 38(2): 325-339.

[2] Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton University Press, Princeton, 1976.

[3] Wu W, Zhang M, Li H, Mi J. Knowledge reduction in random information systems via Dempster-Shafer theory of evidence. Information Sciences 2005; 174(3): 143-164.

[4] Yang B, Kim KJ. Application of Dempster-Shafer theory in fault diagnosis of induction motors using vibration and current signals. Mechanical Systems and Signal Processing 2006; 20(2): 403-420.

[5] Liu Y, Jiang Y, Liu X, Yang S. CSMC: a combination strategy for multi-class classification based on multiple association rules. Knowledge-Based Systems 2008; 21(8): 786-793.

[6] Xiao Z, Yang X, Niu Q, Dong Y, Gong K, Xia S, Pang Y. A new evaluation method based on D-S generalized fuzzy soft sets and its application in medical diagnosis problem. Applied Mathematical Modelling 2012; 36(10): 4592-4604.

[7] Li P, Li S. Interval-valued intuitionistic fuzzy numbers decision-making method based on grey incidence analysis and D–S theory of evidence, Acta Autom. Sin. 2011; 37: 993–998.

[8] Wu D. Supplier selection in a fuzzy group setting: a method using grey related analysis and Dempster–Shafer theory, Expert Syst. Appl. 2009; 36: 8892–8899.

[9] Verbert K, Babuška R, Schutter B. Bayesian and Dempster–Shafer reasoning for knowledge-based fault diagnosis – A comparative study. Engineering Applications of Artificial Intelligence 2017; 60: 136–150.

[10] Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. Chapman and Hall, 1991.

[11] Pearl J.. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. San Francisco, CA: Morgan Kauffmann, 1988.

[12] Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems 1999; 100: 9–34.

[13] Shafer, G. A mathematical theory of evidence. New Jersey: Princeton University Press, 1976.

[14] Yager R.R, Kacprzyk J, Fedrizzi M. Advances in the Dempster–Shafer theory of evidence. John Wiley & Sons, Inc. 1994.

[15] Gupta M, Mohanty B.K. Finding the numerical compensation in multiple criteria decision-making problems under fuzzy environment. International Journal of Systems Science 2016; 14: 1-10.

[16] Peng J.J, Wang J.Q, Wu X.H, Zhang, H.Y, Chen, X.H. The fuzzy cross-entropy for intuitionistic hesitant fuzzy sets and their application in multi-criteria decision-making. International Journal of Systems Science 2015; 46: 2335-2350.

[17] Hu J, Zhang X, ChenX, Liu Y. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making. International Journal of Systems Science 2015; 47: 62-76.

[18] Toghyani A, Rajabzadeh A, Anvari Rostamy A. Designing of Decision Making Model in Uncertainty Conditions, Modern Researches in Decision Making 2016; 1(1):189-216.

[19] Ghorbani Z, Tavakkoli-Moghaddam R, Vahdani B, Minaee M, Mousavi S.M. Solving an analysis network process model for selection of the dispatching rules by an interval-valued intuitionistic fuzzy set, Management Researches in Iran (Modares Human Sciences) 2014; 18(2):195-214.

[20] Wang X, Zhu J, Song Y, Lei L. Combination of unreliable evidence sources in intuitionistic fuzzy MCDM framework. Knowledge-Based Systems 2016; 97: 24–39.

[21] Razavi Hajiagha S.H, Hashemi S.S, Mohammadi Y, Zavadskas E.K. Fuzzy belief structure based VIKOR method: an application for ranking delay causes of Tehran metro system by FMEA criteria. Transport 2016; 31: 108-118.

[22] Zhou H, Wang J.Q, Zhang H.Y, Chen X.H. Linguistic hesitant fuzzy multi-criteria decision-making method based on evidential reasoning. International Journal of Systems Science 2016; 47: 314-327.

[23] Yang J.-B. Rule and utility based evidential reasoning approach for multiattribute decision analysis under uncertainties. European Journal of Operational Research 2001; 131: 31–61.

[24] Yang J-B, Sen P. A general multi-level evaluation process for hybrid MADM with uncertainty. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 1994; 24:1458–1473.

[25] Kabak, O, Ruan D. A comparison study of fuzzy MADM methods in nuclear safeguards evaluation. Journal of Global Optimization 2011; 51: 209–226.

[26] Kabak O, Ruan D. A cumulative belief degree-based approach for missing values in nuclear safeguards evaluation. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 2011; 23: 1441–1454.

[27] Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control 1965; 8: 338–353.

[28] Atanassov K.T. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 1986; 20: 87–96.