پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۷

مسئله مسیریابی تولید رقابتی: مدل‌سازی، حل و ارائه نامعادلات معتبر

جواد بهنامیان[1*]، فرزانه ادبی[2]

۱- دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران
۲- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

دریافت: ۱۳۹۵/۷/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۶/۸/۱۷

چکیده

حمل‌ونقل در سیستم‌های اقتصادی، تولیدی و خدماتی از جایگاه مهمی برخوردار است و بخش قابل‌توجهی از تولید ناخالص ملی هر کشوری را به خود اختصاص می‌دهد. مسئله مسیریابی تولید، توسعه‌ای بر مباحث فروشنده دوره‌گرد و مسیریابی خودرو است که در آن برنامه‌ریزی زمان و میزان تولید نیز موردتوجه است. عموماً در مسائل فوق، فرض بر این است که نوعی انحصار در محیط وجود دارد و توجهی به تأثیر رقبا در این مسائل در نظر گرفته نشده است. در این مقاله، مسئله مسیریابی تولید رقابتی با فرض دانستن زودترین و دیرترین زمان تأمین تقاضا توسط رقیب مدل‌سازی می‌شود. نامعادلات معتبری برای این مسئله ارائه شده و میزان تأثیر آن‌ها در زمان حل دقیق به‌وسیله نرم‌افزار سیپلکس بررسی شده است. نامعادلات فوق برای مسئله با وسایل نقلیه همگن و ناهمگن به تفکیک ارائه شده است. درنهایت نیز نتایج به‌دست‌آمده از آن‌ها مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: مسئله مسیریابی تولید؛ شرایط رقابتی؛ نامعادلات معتبر.

۱- مقدمه

مسئله مسیریابی تولید به ترکیب دو مسئله شناخته‌شده‌ی تعیین اندازه انباشته و مسیریابی خودرو، برای تولید یک راه‌حل بهینه با کمترین هزینه برای کل سیستم

* نویسنده مسئول مقاله: E-mail: Behnamian@Basu.ac.ir

می‌پردازد. همچنین مسئله مسیریابی تولید یک تعمیم از مسئله تعیین اندازه انباشته با حمل‌ونقل مستقیم و مسئله مسیریابی موجودی است. در مسئله تعیین اندازه انباشته با حمل‌ونقل مستقیم، محصولات به‌طور مستقیم از کارخانه به مشتریان منتقل می‌شوند. مدل به کمینه‌سازی هزینه‌های تولید، راه‌اندازی، موجودی و حمل‌ونقل مستقیم در طول افق برنامه‌ریزی می‌پردازد. این مسئله معمولاً شامل جنبه‌های مختلف تولید است؛ به‌عنوان‌مثال، هزینه آماده‌سازی تولید یا زمان راه‌اندازی، و تصمیمات توزیع که در آن هزینه‌های ثابت و متغیر در واحد تحویل به مشتری خاص وجود دارد [۱]. هنگامی‌که در مسئله مسیریابی تولید جنبه مسیریابی گنجانده شده و جنبه تولید نادیده گرفته شود، مسئله به مسیریابی موجودی تبدیل شده است. در مسئله مسیریابی موجودی، نقطه شروع یک انبار است که در آن هیچ تصمیم تولیدی صورت نمی‌گیرد. مقادیرِ تولیدشده و دردسترس هر دوره معمولاً مشخص است. یک خودرو می‌تواند به بیش از یک مشتری در طول مسیر خود مراجعه کند. مسئله مسیریابی موجودی، به‌عنوان یک تعمیم از مسئله مسیریابی خودرو است که متشکل از تصمیم‌گیری برای مقادیر تحویل و مسیرهای خدمت به مشتریان، همچنین زمان‌بندی برای تأمین تقاضای مشتریان است. با توجه به پیچیدگی‌های مسیریابی تناوبی و تصمیم‌گیری‌های موجودی، مسئله بسیار سخت‌تر از مسئله کلاسیک مسیریابی خودرو است [۲]. در مسئله مسیریابی تولید، تولیدکننده باید در هر دوره تصمیم‌گیری کند که آیا محصول تولید نماید یا خیر و میزان اندازه انباشته مربوطه چقدر باشد. در صورت تولید، متحمل هزینه آماده‌سازی ثابت و همچنین هزینه‌های تولید متغیر نسبت به واحد محصول می‌شود. علاوه بر این، اندازه انباشته نمی‌تواند از ظرفیت تولید تجاوز کند. توزیع از تولیدکننده به خرده‌فروشان توسط تعداد محدودی از وسایل نقلیه با ظرفیت محدود و هزینه‌های مسیریابی صورت می‌گیرد. اگر محصولات در کارخانه یا در خرده‌فروشی‌ها ذخیره شوند، باید متحمل هزینه‌های نگهداری واحد موجودی شوند.

در این تحقیق، شرایط رقابتی و به‌عبارت‌دیگر تقاضای وابسته به زمان تأمین و رسیدن خودرو در مسئله مسیریابی خودرو پیاده‌سازی شده و همچنین چهار نامعادله معتبر ارائه شده و تأثیر آن‌ها در زمان حل مدل بررسی شده است.

رقابت بین محصولات مشابه بین تولید توزیع‌کنندگان و توزیع‌کنندگان مختلف موجب تغییرات تقاضا در واحد زمان در طول یک دوره خواهد شد. در این تحقیق منظور از شرایط رقابتی، پیاده‌سازی تقاضای متغیر در واحد زمان در طول هر دوره است؛ به‌این‌ترتیب که با گذر زمان و تأخیر در تأمین سفارش مشتری، تقاضا با توزیع یکنواخت کاهش می‌یابد. این ایده یعنی پیاده‌سازی شرایط رقابتی با تغییرات تقاضا توسط مقالات [۳] و [۴] ارائه شده است.

تغییرات تقاضا متناسب با زمان می‌تواند به عوامل مختلفی وابسته باشد؛ مانند زمان رخداد تقاضا در طی دوره، میزان صبر مشتری و پایبند بودن مشتری به برند، کیفیت محصول و محصولات جایگزین، ضرورت و نیاز به محصول. برای مثال، در کسب‌وکارهایی که محصولات با تقاضای زیاد و تاریخ انقضای کوتاه‌مدت عرضه می‌شوند و کیفیت آن‌ها به تازه بودنشان است، فروشندگان نمی‌توانند این محصولات را برای مدت طولانی انبار کنند؛ نظیر فروش شیر و شیرینی. کاربرد دیگر این مدل می‌تواند برای فروش محصولاتی باشد که دارای قیمت زیاد و تقاضای کم هستند و سرمایه ازدست‌رفته بالایی برای نگهداری در سایت مشتری دارند؛ مانند محصولات درماتولوژیک که با توجه به سیاست فروش توزیع‌کننده برای تعادل بین فروش و هزینه‌های سرمایه ازدست‌رفته، معمولاً در تمامی مراکز خرده‌فروش موجود نیستند و با هر تقاضا، موجودی خرده‌فروش توسط توزیع‌کننده شارژ می‌شود. از کاربردهای دیگر این مدل، کسب‌وکارهای خدماتی است؛ برای مثال، شرکت‌های تعمیر و نصب لوازم‌خانگی و تاکسی‌های تلفنی را می‌توان نام برد که در صورت تأخیر در ارائه خدمات، تقاضا توسط شرکت‌های رقیب تأمین می‌شود.

در بخش سوم مدل ریاضی مسئله ارائه می‌شود و در بخش چهارم طبق نامعادلات معتبر ارائه‌شده در مقاله [۶]، نامعادلات معتبر متناسب با مسئله ارائه می‌شود. در بخش پنجم مثال عددی و نتایج حل ارائه خواهد شد.

۲- مبانی نظری تحقیق

در مقاله [۵]، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای تصمیم‌گیری برنامه‌ریزی مسیریابی تولید ارائه شده است. ظرفیت تولید و موجودی هزینه‌های راه‌اندازی، نگهداری موجودی و حمل‌ونقل، غیرقطعی فرض شده‌اند. با توجه به عدم دانش نسبت

به پارامترهای مسئله، از اعداد فازی مثلثی برای ایجاد انعطاف‌پذیری در مدل استفاده شده است. در این پژوهش، مورد مطالعه‌شده یک شرکت شیرینی در دنیای واقعی است. مقاله [۶] قالبی از مسئله توزیع‌کننده با چندین خرده‌فروش با در نظر گرفتن برنامه‌ریزی تولید و محدودیت‌های ذخیره‌سازی و ظرفیت وسیله نقلیه ارائه نموده است که علاوه بر هزینه‌های بهره‌برداری دارای هزینه‌های تعمیر و نگهداری ثابت خرده‌فروش است. در این مقاله، دو فرمولاسیون برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی مختلط ارائه شده و شش خانواده از نامعادلات معتبر برای تقویت این فرمولاسیون اضافه شده‌اند. دو مورد از این خانواده‌ها جدید هستند و بقیه از مبانی نظری اقتباس شده‌اند. پژوهشی دیگر، فرمول‌بندی‌های متفاوتی برای چندین وسیله نقلیه مطرح می‌کند و تعدادی محدودیت شکست تقارن را معرفی می‌کند. نمونه‌های با حداکثر ۳۵ مشتری، ۳ دوره و ۳ وسیله نقلیه، تا رسیدن به بهینگی حل می‌شوند [۷].

یک مدل تحلیل شبکه‌ای در [۸] ارائه شده است که به پاسخگویی به تقاضای مشتریان در یک سیستم تولید انعطاف‌پذیر و انتخاب قانون مناسب توزیع امکانات می‌پردازد و برای مقابله با عدم قطعیت از مجموعه فازی بازه‌ای شهودی بهره برده است. در [۹] نیز مدلی برای کنترل بحران کمبود موجودی در مسئله برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی ارائه شده است. در این تحقیق فرض شده است که تقاضا از توزیع نرمال پیروی می‌کند و امکان تقاضای پس‌افت وجود دارد. همچنین برای حل مسئله عدد صحیح مختلط غیرخطی از الگوریتم فراابتکاری ژنتیک استفاده شده است. در مقاله [۱۰] یک مدل عددصحیح غیرخطی برای برنامه‌ریزی تولید توزیع چابک با فرض وابستگی قیمت به تقاضا ارائه شده است. در این مدل تقاضا برای کالاها با کیفیت‌ها و قیمت‌های مختلف تغییر می‌کند.

مقاله [۳] یک مدل ریاضی برای یک مسیریابی خودرو باز با پنجره‌های زمانی رقابتی ارائه نموده است و مسئله با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید حل شده است. در ادامه تحقیقات، در مقاله [۴] مدلی ریاضی برای یک مسیریابی خودرو باز چندهدفه با پنجره‌های زمانی رقابتی ارائه شده است. بر اساس اهمیت هزینه حمل‌ونقل، هزینه هر مسیر کمینه شده و فروش به‌دست‌آمده به‌طور هم‌زمان بیشینه می‌شود. این مدل به‌وسیله الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات چندهدفه حل شده و نتایج مرتبط با آن با نتایج حاصل‌شده از الگوریتم ژنتیک *NSGA-II* مقایسه شده‌اند.

در این تحقیق از فرض‌های صورت گرفته در مقالات [۳] و [۴] استفاده شده است. علیرغم وجود شباهت‌هایی بین مدل‌های کلاسیک مسیریابی خودرو بوسیله پنجره زمانی با مدل مطرح‌شده در این پژوهش، تفاوت‌های متعددی نیز میان این دو وجود دارند که بدین ترتیب توصیف می‌شوند: ۱- در مدل‌های کلاسیک، رسیدن مشتری زودتر از حد پایین پنجره‌های زمانی مطلوب نیست؛ درحالی‌که در مدل جدید مطلوب است، ۲- در مدل‌های کلاسیک، رسیدن مشتری در هر زمان در محدوده‌های پنجره زمانی مطلوبیت‌هایی دارد، اما در مدل مطرح شده مطلوبیت زمان رسیدن از حد پایین تا حد بالای پنجره‌های زمانی کاهش می‌یابد و ۳- در مدل جدید، رسیدن مشتری بعد از حد بالای پنجره‌های زمانی، قسمتی از فروش را از بین می‌برد اما در مدل‌های کلاسیک، فروش کلی از دست می‌رود یا تنها مطلوبیت کاهش می‌یابد.

۳- مسئله مسیریابی تولید رقابتی

با توجه به مشاهدات واقعی، محیطی رقابتی در بین توزیع‌کنندگان وجود دارد که لازم است علاوه بر در نظر گرفتن طول مسیر و میزان گنجایش وسایط نقلیه که منجر به کاهش هزینه حمل‌ونقل می‌شود، زمان رسیدن رقبای دیگر نیز به مقاصد در نظر گرفته شود. اهمیت این موضوع چنان است که واحدهای تولیدی برای به دست آوردن بیشترین نقدینگی و از دست ندادن بازار فروش، مسیریابی وسایط نقلیه را بر اساس وضعیت رقبای دیگر تعیین می‌کنند. در این مسئله برای یافتن زمان مطلوب خدمات‌رسانی، با توجه به بازه خدمات‌رسانی رقبا *[t1,t2]*، سعی می‌شود امید ریاضی خدمات‌رسانی به مشتری قبل از رقبا حداکثر شود. در این مقاله، فرض شده است که تابع توزیع کسب نقدینگی توزیع‌کنندگان، از یک تابع با توزیع یکنواخت پیروی می‌کند که برحسب زمان رسیدن وسایط نقلیه هر توزیع‌کننده به مشتری مشخص می‌شود. اگر توزیع‌کننده در بازه *[t0,t1]* به مشتری برسد تمامی نقدینگی حاصل از آن گره یا مصرف‌کننده را تصاحب و سهم بازار را کسب می‌کند، ولی اگر در بازه زمانی *[t1,t2]* به مشتری خدمات بدهد، امید ریاضی کسب نقدینگی متناسب با تأخیر کاهش می‌یابد و همچنین اگر در بازه *t2* به بعد به گره یا مصرف‌کننده برسد، هیچ نقدینگی را کسب نمی‌کند؛ بنابراین هدف توزیع‌کننده آن است که قبل از رسیدن رقبا به مصرف‌کننده برسد. در این رویکرد از مدل‌سازی شرایط رقابتی، امکان شراکت در سهم بازار

تقاضا با سایر تولید و توزیع‌کنندگان فراهم می‌شود و دیگر مسئله در بازار انحصاری نخواهد بود. بااین‌حال در این روش با توجه به اینکه تأمین تقاضا توسط رقیب با استفاده از تابع توزیع احتمالی معین مدل‌سازی می‌شود، امکان انتخاب و تصمیم‌گیری از رقیب گرفته می‌شود؛ بنابراین، نتایج این مسئله با نتایج حاصل از مدل‌سازی بوسیله روابط نظریه بازی‌ها متفاوت و غیرقابل مقایسه است. رویکرد حاضر برای مدل‌سازی شرایط رقابتی توسط [۳] و [۴] ارائه شده است و تحقیق حاضر از نتایج ایشان در مدل‌سازی بهره برده است.

در این تحقیق، مسئله مسیریابی تولید با فرض بازار رقابتی توسعه داده می‌شود. برای پیاده‌سازی شرایط رقابتی از فرض صورت گرفته در مقالات [۳] و [۴] استفاده شده و مدل ریاضی عدد صحیح مختلط غیرخطی ارائه شده است. مسئله موردنظر دارای مفروضات زیر است:

۱- مسئله دارای یک تولیدکننده است که به تولید یک محصول می‌پردازد.

۲- ازآنجایی‌که مدل تأمین تمامی تقاضا را الزام نمی‌کند، مجموع میزان تقاضای تأمین‌شده با یک ضریب از مجموع هزینه‌های موجودی، راه‌اندازی، تولید و حمل‌ونقل در تابع هدف کمینه‌سازی کسر می‌شود. در این حالت مدل متناسب با هزینه‌ها تلاش می‌کند تا بیشترین تقاضا را تأمین نماید.

۳- امکان تولید در تمامی دوره‌ها وجود دارد و ظرفیت تولید برای هر دوره متفاوت است.

۴- تقاضای پس‌افت ممکن نیست، اما امکان از دست دادن تقاضا وجود دارد.

۵- زودترین زمان و دیرترین زمان تحویل محصول توسط رقیب معین فرض شده است و میزان تأمین تقاضا با توزیع یکنواخت در این بازه محاسبه می‌شود.

۶- از آنجایی که فرض خودرو ناهمگن توسعه‌ای برای مسائل با خودرو همگن است، مدل با وسایل ناهمگن با حذف زیروند k از پارامترهای ω_k، τ_{ik}، τ_{ijk} و T_k قابل تبدیل به مدل با وسایل همگن است. ازاین‌رو، مدل پایه برای مسئله با لوازم ناهمگن نوشته شده است، اما با توجه به اینکه بعضی از معادلات نامعتبر در حالت وسایل ناهمگن با حالت همگن متفاوت است، در این تحقیق نامعادلات معتبر برای هر دو حالت شرح داده شده است. بنابراین در این تحقیق فرض شده است که چند وسیله نقلیه همگن و ناهمگن با ظرفیت محدود و یکسان در هر دوره وجود دارد.

۷- تولیدکننده و هر یک از نقاط تقاضا، دارای محدودیت ظرفیت انبارش محصول برای دوره‌های بعد است. برای ارائه نامعادله معتبر، فرض شده است که هزینه نگهداری در تولیدکننده کمتر از هزینه نگهداری در نقاط تقاضا است.

۸- پارامترهای مدل قطعی فرض شده‌اند.

۹- هوشیاری رقبا و امکان تصمیم‌گیری هوشمندانه و تغییر استراتژی رقبا مدل‌سازی نشده است.

۱۰-مفروضات ۴، ۸ و ۹ مواردی از دنیای واقعی هستند که در این تحقیق مدنظر قرار نگرفته‌اند و ساده‌سازی شده‌اند.

زیروندها، پارامترها و متغیرهای استفاده‌شده در مدل به شرح زیر است:

زیروندها

k وسیله نقلیه؛

i, j, p مشتریان و تولیدکننده $i=1$؛

T دوره.

پارامترها

s هزینه آماده‌سازی؛

r هزینه تأمین وسیله نقلیه؛

c_{ij} هزینه حمل‌ونقل؛

h_i هزینه نگهداری هر واحد محصول در انبار تولیدکننده و مشتریان؛

γ ضریب سود تأمین تقاضای وابسته به زمان؛

d_{tdit} تقاضای وابسته به زمان؛

t_{uit} دیرترین زمان تأمین تقاضا توسط رقیب؛

t_{lit} زودترین زمان تأمین تقاضا توسط رقیب؛

d_{jt} میزان تقاضای مستقل از زمان؛

$I_{j\max}$ حداکثر ظرفیت انبارش تولیدکننده و مشتریان؛

Q حداکثر ظرفیت تولید تولیدکننده؛

ω_k حداکثر ظرفیت وسیله نقلیه k؛

τ_{ik} زمان سپری‌شده توسط وسیله نقلیه k برای مشتری i؛

τ_{ijk} زمان سپری‌شده توسط وسیله نقلیه k برای سفر از مشتری i به مشتری j؛

T_k حداکثر زمان موجود برای وسیله نقلیه k ام (می‌توان متناسب با سرعت وسایل نقلیه و ظرفیت مخزن بنزینشان متفاوت فرض کرد).

متغیرها

y_t اگر در دوره t تولیدکننده تولیدی صورت دهد، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر به آن داده می‌شود؛

v_{kt} اگر در دوره t وسیله نقلیه k ام بکار رود، مقدار یک و در غیر این صورت، مقدار صفر به آن داده می‌شود؛

x_{ijkt} اگر در دوره t وسیله نقلیه k ام از مکان i به j حرکت کند، مقدار یک و در غیر این صورت، مقدار صفر به آن داده می‌شود؛

I_{it} متغیر میزان موجودی در هر دوره برای تولیدکننده و مشتریان؛

o_{it} اگر در دوره t تقاضای وابسته به زمان مشتری زودتر از رقیب، یعنی قبل از زمان t_{lit} تأمین شود، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر به آن داده می‌شود؛

g_{it} اگر در دوره t، تقاضای وابسته به زمان مشتری هم‌زمان با رقیب، یعنی در بین زمان‌های t_{lit} و t_{uit} تأمین شود، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر به آن داده می‌شود؛

t_{dit} زمانی که در دوره t، مکان i بازدید می‌شود؛

q_t^p میزان تولید محصول توسط تولیدکننده؛

q_{jkt} میزانی از محصول که در دوره t به مشتری i توسط وسیله نقلیه k ام ارسال می‌شود.

مدل ریاضی عدد صحیح مختلط غیرخطی برای مسئله مسیریابی تولید رقابتی با وسایل نقلیه ناهمگن عبارت است از:

$$\min \sum_t (sy_t + \sum_k rv_{kt} + \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij} x_{ijkt} + \sum_i h_i I_{it} - \gamma (\sum_i o_{it} d_{tdit} + g_{it} (\frac{t_{uit} - t_{dit}}{t_{uit} - t_{lit}}) d_{tdit})) \qquad (۱)$$

$$S.t.: \qquad I_{1t} = I_{1t-1} + q_t^p - \sum_{j|1}\sum_k q_{jkt} \qquad \forall t \qquad (۲)$$

$$I_{jt} = I_{jt-1} - d_{jt} - \sum_i o_{it} d_{tdit} - g_{it}\left(\frac{t_{uit} - t_{dit}}{t_{uit} - t_{lit}}\right) d_{tdit} + \sum_k q_{jkt} \qquad \forall t, j|1 \qquad (۳)$$

$$I_{jt} \le I_{j\max} \qquad \forall t, j \qquad (۴)$$

$$q_t^p \le QY_t \qquad \forall t \qquad (۵)$$

$$\sum_{j|1} q_{jkt} \le \omega_k v_{kt} \qquad \forall t, k \qquad (۶)$$

$$q_{jkt} \le \omega_k \sum_i x_{ijkt} \qquad \forall t, k, j|1 \qquad (۷)$$

$$\sum_i \sum_k x_{ijkt} \le 1 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۸)$$

$$\sum_i \left(\tau_{ik} \sum_j x_{ijkt}\right) + \sum_i \sum_j \tau_{ijk} x_{ijkt} \le T_k \qquad \forall t, k \qquad (۹)$$

$$td_{jt} = \sum_i \left(td_{it} \sum_k x_{ijkt}\right) + \sum_i \sum_k (\tau_{ik} + \tau_{ijk}) x_{ijkt} \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۰)$$

$$tu_{jt} - td_{jt} - M(o_{jt} + g_{jt}) \le 0 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۱)$$

$$tu_{jt} - td_{jt} + M(1 - o_{jt} - g_{jt}) \ge 0 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۲)$$

$$g_{jt} + o_{jt} \le 1 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۳)$$

$$g_{jt} + o_{jt} \le td_{jt} \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۴)$$

$$tl_{jt} - td_{jt} + M(1 - o_{jt}) \ge 0 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۵)$$

$$tl_{jt} - td_{jt} - M(o_{jt}) \le 0 \qquad \forall t, j|1 \qquad (۱۶)$$

$$U_{ikt} - U_{jkt} + \omega_k x_{ijkt} \le \omega_k - q_{jkt} \qquad \forall k,t,2 \le i \ne j \qquad (۱۷)$$

$$\sum_i x_{ipkt} - \sum_j x_{pjkt} = 0 \qquad \forall t,p,k \qquad (۱۸)$$

$$\sum_i x_{i1kt} = v_{kt} \qquad \forall t,k \qquad (۱۹)$$

$$o_{it}, g_{it}, y_t, x_{ijkt}, v_{kt} \in \{0,1\} \qquad (۲۰)$$

$$td_{it}, q_t^p, I_{it}, q_{jkt} \ge 0 \qquad (۲۱)$$

در روابط فوق، متغیرهای q_t^p و y_t به برنامه‌ریزی تولید و متغیرهای q_{jkt}، x_{ijkt} و v_{kt} به مسیریابی و برنامه‌ریزی توزیع اشاره دارد. رابطه ۱ نشان‌دهنده تابع هدف است که به ترتیب به کمینه‌سازی هزینه آماده‌سازی تولید، هزینه تأمین و تخصیص وسیله نقلیه، هزینه حمل‌ونقل وسایل نقلیه بین مشتریان و هزینه نگهداری اشاره دارد. همچنین در صورت تأمین تقاضای وابسته به زمان شرکت سودی کسب می‌کند؛ البته می‌توان برای عدم تأمین تقاضا نیز جریمه‌ای تعیین نمود که برابر است با رابطه ۲۲:

$$\sum_t \chi\left(\sum_i (1-g_{it}-o_{it}) d_{tdit} + g_{it}\left(\frac{t_{dit}-t_{lit}}{t_{uit}-t_{lit}}\right) d_{tdit}\right) \qquad (۲۲)$$

رابطه ۲ نشان‌دهنده معادله تعادل موجودی تولیدکننده در هر دوره است. به‌طور مشابه، رابطه ۳ نشان‌دهنده معادله تعادل موجودی هر یک از مشتریان است. رابطه ۴ بیان‌کننده محدودیت حداکثر ظرفیت نگهداری موجودی در تولیدکننده و مشتریان است. رابطه ۵ علاوه بر ایجاد رابطه بین متغیر دودویی تولید با متغیر میزان تولید، حداکثر ظرفیت تولید را نیز نشان می‌دهد. رابطه ۶ مشابه محدودیت ۵ برای ایجاد ارتباط بین متغیرهای تخصیص وسیله نقلیه، حداکثر ظرفیت هر خودرو را محدود می‌سازد. رابطه ۷ نشان‌دهنده این است که اگر وسیله نقلیه kام در دوره t مشتری jام را ملاقات کند، بتواند به آن مشتری حداکثر به میزان ظرفیتش محصول ارائه نماید. رابطه ۸ بیانگر این نکته

است که در هر دوره هر مشتری حداکثر از یک وسیله نقلیه می‌تواند محصول دریافت نماید. رابطه ۹ محدودیت حداکثر زمان خدمات‌رسانی ممکن برای هر وسیله نقلیه در هر دوره را مشخص می‌کند. رابطه ۱۰ زمان رسیدن وسیله نقلیه به هر مشتری در هر دوره را بر اساس مسیر طی شده توسط وسیله نقلیه محاسبه می‌نماید. روابط ۱۱ تا ۱۶ ارتباط بین زمان رسیدن هر وسیله نقلیه با متغیر دودویی متناظرش را بیان می‌کند. روابط ۱۷ و ۱۸ تضمین می‌کنند که در مسیر هر یک از وسایل نقلیه هیچ زیرتوری رخ ندهد و وسایل نقلیه از مشتری که به آن وارد شده‌اند، خارج شوند. رابطه ۱۷ برگرفته از روابط ارائه‌شده در مقالات [۱۲] و [۱۳] است. مقاله [۱۳] رابطه خطی برای حذف زیرتور ارائه و اثبات نموده است. در این مقاله به‌طور مفصل روابط برای مسائل فروشنده دوره‌گرد تا مسیریابی وسایل نقلیه با یک مرکز توزیع و چند مرکز توزیع، همچنین وسایل نقلیه همگن و ناهمگن توسعه داده و اثبات شده است. رابطه ۱۹ نشان‌دهنده این است که وسایل نقلیه، در صورت استفاده، در هر دوره به تولیدکننده بازگردند. رابطه ۲۰ متغیرهای صفر و یک و رابطه ۲۱ متغیرهای نامنفی را نشان می‌دهد. در تلاش برای خطی‌سازی رابطه ۱ و ۳ به‌جای رابطه ۲۳، رابطه ۲۴ حاصل می‌شود که نشان می‌دهد این عبارت قابلیت خطی شدن را ندارد.

$$(o_{it}+g_{it}(\frac{t_{uit}-t_{dit}}{t_{uit}-t_{lit}}))(d_{tdit}-e_{it})=(o_{it}d_{tdit}+\{g_{it}(\frac{t_{uit}}{t_{uit}-t_{lit}})-(\frac{g_{it}t_{dit}}{t_{uit}-t_{lit}})\}\,d_{tdit}) - (\sum_i o_{it}e_{it}+g_{it}e_{it}(\frac{t_{uit}}{t_{uit}-t_{lit}})-(\frac{g_{it}t_{dit}e_{it}}{t_{uit}-t_{lit}})) \quad (۲۳)$$

$$(\sum_i o_{it}d_{tdit}+\{g_{it}(\frac{t_{uit}}{t_{uit}-t_{lit}})-(\frac{\varsigma_{it}}{t_{uit}-t_{lit}})\}\,d_{tdit}))-(\sum_i \varphi_{it}+\psi_{it}(\frac{t_{uit}}{t_{uit}-t_{lit}})-(\frac{g_{it}t_{dit}e_{it}}{t_{uit}-t_{lit}})) \quad (۲۴)$$

$$\varsigma_{it}\le Mg_{it} \qquad \forall i,t$$
$$\varsigma_{it}\le t_{dit} \qquad \forall i,t$$
$$\varsigma_{it}\ge t_{dit}-M(1-g_{it}) \qquad \forall i,t$$
$$\varphi_{it}\le Mo_{it} \qquad \forall i,t$$
$$\varphi_{it}\le e_{it} \qquad \forall i,t$$
$$\varphi_{it}\ge e_{it}-M(1-o_{it}) \qquad \forall i,t$$
$$\psi_{it}\le Mg_{it} \qquad \forall i,t$$
$$\psi_{it}\le e_{it} \qquad \forall i,t$$
$$\psi_{it}\ge e_{it}-M(1-g_{it}) \qquad \forall i,t$$

همان‌طور که از رابطه ۲۴ قابل‌مشاهده است، رابطه $g_{it}t_{dit}e_{it}$ به دلیل داشتن دو متغیر عددصحیح و یک متغیر دودویی، قابلیت خطی شدن را ندارد. همچنین برای خطی‌سازی رابطه ۱۰ می‌توان روند فوق را تکرار نمود؛ به‌طوری‌که رابطه ۲۵ حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& td_{jt} = \sum_i \Phi_{ijt} + \sum_i \sum_k (\tau_{ik} + \tau_{ijk}) x_{ijkt} \qquad \forall t, j \mid 1 \qquad (۲۵)\\
& \Phi_{ijt} \le M \sum_k x_{ijkt} \qquad \forall t, j \mid 1, i\\
& \Phi_{ijt} \ge td_{it} - M (1 - \sum_k x_{ijkt}) \qquad \forall t, j \mid 1, i\\
& \Phi_{ijt} \le td_{it} \qquad \forall t, j \mid 1, i
\end{aligned}
$$

برای نوشتن مدل ریاضی وسایل همگن کافیست در روابط فوق پارامترهای ω_k، τ_{ijk}، τ_{ik} و T_k به پارامترهای ثابت و برابر به ازای هر وسیله نقلیه تغییر کنند و برابر شوند با ω، τ_i، τ_{ij} و T. البته با تغییرات صورت گرفته می‌توان مدل را خلاصه‌سازی نمود و برخی روابط را حذف نمود.

۴- نامعادلات معتبر

در مقاله [۶] یک سری نامعادله معتبر برای مسئله مسیریابی توزیع ارائه و دسته بندی شده است. ازآنجایی‌که مدل ارائه‌شده در این تحقیق توسعه‌ای بر مسئله مسیریابی توزیع بشمار می‌آید، در این بخش ابتدا نامعادلات معتبر ارائه‌شده در مقاله [۶] شرح داده می‌شوند و سپس در هر قسمت نحوه استفاده و پیاده‌سازی ایده اصلی هر یک از نامعادلات معتبر برای مدل مسیریابی تولید رقابتی بسط داده می‌شود.

أ- حداکثر تعداد وسایل نقلیه

اگر فرض کنیم در دوره t همه مشتریان بازدید شوند، به‌طوری‌که تمامی ظرفیت نگهداری آن‌ها پر شود، حداکثر تعداد وسیله نقلیه موردنیاز آن دوره در مسئله مسیریابی تولید بدون پنجره زمانی برابر خواهد بود با:

$$\sum_k y_{kt} \le \left\lceil \frac{\sum_j (I_j^{\max} + d_{jt})}{\omega} \right\rceil \qquad \forall t \in T \tag{۲۶}$$

اما در مسئله مسیریابی تولید رقابتی، تعداد وسایل نقلیه به زمان رسیدن به هر مشتری و میزان تقاضای ازدست‌رفته و سرعت رقیب در تأمین تقاضای مشتری بستگی دارد؛ لذا در این مسئله، لزوماً تعداد وسایل نقلیه با مقدار رابطه فوق موجب دستیابی به جواب بهینه نمی‌شود. در مسئله مسیریابی تولید رقابتی می‌توان فرض نمود اگر همه مشتریان بازدید شوند، به‌طوری‌که تمامی ظرفیت نگهداری آن‌ها پر شود و هیچ تقاضای ازدست‌رفته‌ای نداشته باشیم، رابطه ۲۷ برای مسئله مسیریابی با خودروهای همگن صحیح حاصل خواهد شد. قسمت اول رابطه، معادل رابطه ارائه‌شده توسط مقاله [۱۱] است و قسمت دوم نشان‌دهنده این است که بایستی تعداد خودروهای در اختیار به آن مقداری باشد که به هیچ عنوان با تقاضای ازدست‌رفته مواجه نشویم. صورت کسر بیشترین فاصله هر مشتری از مشتری دیگر را محاسبه نموده و این مقادیر را به ازای تمامی مشتریان جمع می‌کند؛ از طرفی دیگر، مخرج کسر زودترین زمان از دست دادن تقاضا را محاسبه می‌کند و بیشترین زمانی را که هر خودرو از تولیدکننده به مشتریان می‌رسد، از آن کسر می‌کند. این زمان نشان‌دهنده کمترین زمان ممکن برای یک خودرو است تا از یک مشتری به مشتری دیگر سفر کند و با تقاضای ازدست‌رفته مواجه نشود.

در تعمیم رابطه ۲۷ برای مسئله مسیریابی تولید رقابتی با *وسایل ناهمگن* می‌توان رابطه محدودیت ۲۸ برای $\forall t \in T$ را نوشت:

$$\sum_k y_{kt} \le Max\left\{ \left\lceil \sum_{j|1} (I_j^{\max} + d_{jt}) \Big/ \omega \right\rceil , \sum_{j|1} \underset{i}{Max}(\tau_j + \tau_{ij}) \Big/ (\min_i(t_{lit}) - \underset{j}{Max}(\tau_{1j})) \right\} \quad \forall t \in T \tag{۲۷}$$

$$\sum_k y_{kt} \le Max\left\{ \left\lceil \sum_{j|1} (I_j^{\max} + d_{jt} + d_{tdit}) \Big/ \min(\omega_k) \right\rceil , \sum_{j|1} \underset{i,k}{Max}(\tau_{jk} + \tau_{ijk}) \Big/ (\min_i(t_{lit}) - \underset{j,k}{Max}(\tau_{1jk})) \right\} \tag{۲۸}$$

در رابطه ۲۸، از بیشترین k در صورت و مخرج کسر استفاده می‌شود؛ زیرا که بدترین حالت ممکن است.

ب- حذف تشابه

برای جلوگیری از جستجوی شاخه تکراری در حل به روش شاخه و *کران*، با *فرض همگن* و *مساوی بودن خودروها*، خواهیم داشت: خودروها به ترتیب شماره مورداستفاده قرار می‌گیرند با این ترتیب که خودرو $k+1$ پس از خودرو k ام مورداستفاده قرار می‌گیرد. رابطه ۲۹ شرایط فوق را مهیا می‌سازد.

$$v_{k+1t} \le v_{kt} \quad \forall t \in T,\ 1 \le k \le K-1 \qquad (۲۹)$$

ج- وسیله نقلیه کاملاً پر

برای ارائه این نامعادله معتبر فرض شده است که هزینه نگهداری در تولیدکننده کمتر از هزینه نگهداری در مشتریان است. ازاین‌رو، اگر مشتری i ام در دوره $t-1$ دارای موجودی مثبت باشد و در دوره t آن مشتری بازدید شود، باید تمامی ظرفیت خودرو به آن شهر اختصاص داده شود. همچنین نیاز است که حداکثر ظرفیت تولید از ضرب ظرفیت خودرو در تعداد خودروها بیشتر باشد. در این نامعادله، هدف میزان نگهداری است؛ یعنی ممکن است نیاز به نگهداری موجودی نباشد. در این صورت در دوره $t-1$ هم لزوماً موجودی مثبت نمی‌شود و به این معناست که مجموع تقاضا مشتری i در آن دوره، از حداکثر ظرفیت خودرو بیشتر است. اگر در یک دوره برای بیش از تعداد حداکثر خودروها با مشتریانی مواجه شویم که تقاضای بیشتر از ظرفیت یک خودرو را دارند، در این صورت تقاضای مشتریانی (به تعداد مازاد بر تعداد خودروها) که هزینه نگهداری کمتری دارند، در دوره قبل تأمین می‌شود. در مسئله مسیریابی تولید رقابتی، این امکان وجود دارد که با تقاضای ازدست‌رفته مواجه شویم، اما اگر قرار است ذخیره‌ای در دوره $t-1$ صورت گیرد و خودرو در دوره t جای خالی دارد، درهرصورت به‌صرفه خواهد بود آن ذخیره در دوره t به مشتری i انتقال داده شود. برای نوشتن نامعادله معتبر فوق یک متغیر جدید صفر و یک z_{jt} تعریف می‌شود؛ به‌طوری‌که اگر در دوره t مشتری j

ام میزان موجودی مثبت داشته باشد، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر به خود می‌گیرد. در این صورت، رابطه نامعادله معتبر فوق به‌صورت زیر خواهد بود که اثبات آن در [۶] آمده است:

$$I_{jc} \le I_j^{\max} z_{jt} \qquad (۳۰)$$
$$q_{jkt} \ge \omega_k (\sum_i x_{ijkt} + z_{jt-1} - 1)$$

د- نامعادلات معتبر زمان *(I,s)*

نامعادلات معتبر *(I,s)* که در مقاله [۱۳] توسعه‌یافته است، شرح کاملی از منحنی محدب برای مسئله اندازه انباشته نامحدود ارائه می‌دهد.

$$\sum_{t\in S} x_t + \sum_{t\in \bar{S}} d_{tl} y_t \ge d_{tl} \qquad l \in \{1,2,...,T\}, S \subset \{1,2,...,l\}, \bar{S} = \{1,2,...,l\} | S \qquad (۳۱)$$
$$d_{tl} = \sum_{k=t}^{l} d_k$$

اگر هزینه‌ها دارای خاصیت واگنر-ویتین باشند، دستیابی به جواب بهینه مسئله اندازه انباشته نامحدود با اضافه کردن نامعادلات معتبر در مسئله آزادسازی خطی ممکن خواهد بود [۱۴]. به علت اینکه مسئله موردنظر در این مقاله توسعه‌ای از مسئله اندازه انباشته است می‌توان محدودیت *(I,s)* را برای این مسئله توسعه داد؛ به‌طوری‌که در مقاله [۶] محدودیت‌های زیر ارائه شده است: سه دوره زمانی u، l و t' را به‌نحوی‌که $1\le u\le t'\le l\le T$ فرض کنید. اگر محدودیت تعادل موجودی تولیدکننده را در طول دوره‌های $t\in[u,t']$ جمع ببندیم، همچنین محدودیت تعادل موجودی مشتریان را به ازای هر j(مشتریان) و به ازای هر $t\in[u,l]$ جمع ببندیم، خواهیم داشت:

$$I_{1t} = I_{1\,u-1} + \sum_{t=u}^{t'} q_t^p - \sum_{t=u}^{t'} \sum_{j|1} \sum_k q_{jkt} \qquad (۳۲)$$

$$\sum_{j|1} I_{jl} = \sum_{j|1} I_{ju-1} - \sum_{t=u}^{l}\sum_{j} d_{jt} + \sum_{t=u}^{l}\sum_{j}\sum_{k} q_{jkt} \qquad (۳۳)$$

با جمع زدن روابط ۳۲ و ۳۳ بالا خواهیم داشت:

$$I_{lt} + \sum_{j|1} I_{jl} + \sum_{t=u}^{l}\sum_{j} d_{jt} = I_{1u-1} + \sum_{j|1} I_{ju-1} + \sum_{t=u}^{t'} q_t^p + \sum_{t=t'+1}^{l}\sum_{j}\sum_{k} q_{jkt} \qquad (۳۴)$$

ازآنجایی‌که که میزان موجود در هر دوی مشتریان و تولیدکنندگان نامنفی است و طبق محدودیت‌های ظرفیت تولید و ظرفیت خودرو رابطه ۳۵ حاصل می‌شود:

$$I_{1u-1} + \sum_{j|1} I_{ju-1} + Q\sum_{t=u}^{t'} y_{t'} + \omega \sum_{t=t'+1}^{l}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{i} x_{ijkt} \geq \sum_{t=u}^{l}\sum_{j} d_{jt} \quad \forall u \leq t' \leq l \leq T \qquad (۳۵)$$

به همین ترتیب با جمع زدن محدودیت ظرفیت خودرو به ازای هر $t\in[u,l]$ و محدودیت تعادل موجودی مشتریان نامعادله معتبر ۳۶ حاصل می‌شود:

$$I_{ju-1} + \omega\sum_{t=u}^{l}\sum_{k}\sum_{i} x_{ijkt} \geq \sum_{t=u}^{l} d_{jt} \qquad \forall u \leq l \leq T,\ j|1 \qquad (۳۶)$$

با عملکردی مشابه نامعادلات معتبر فوق برای مدل مسیریابی تولید رقابتی به‌صورت روابط ۳۷ و ۳۸ خواهد بود:

$$I_{1u-1} + \sum_{j|1} I_{ju-1} + Q\sum_{t=u}^{t'} y_{t'} + \omega \sum_{t=t'+1}^{l}\sum_{j|1}\sum_{k}\sum_{i} x_{ijkt} \geq \sum_{t=u}^{l}\sum_{j|1}\left(d_{jt} + \sum_{i} o_{it} d_{tdit} + g_{it}\left(\frac{t_{uit} - t_{dit}}{t_{uit} - t_{lit}}\right) d_{tdit}\right) \quad \forall u \leq t' \leq l \leq T \qquad (۳۷)$$

$$I_{j\,u-1}+\omega\sum_{t=u}^{l}\sum_{k}\sum_{i}x_{ijkt}\geq \sum_{t=u}^{l}(d_{jt}+\sum_{i}o_{it}d_{tdit}+g_{it}(\frac{t_{uit}-t_{dit}}{t_{uit}-t_{lit}})d_{tdit}) \quad \forall u\leq l\leq T,\ j\,|1 \tag{۳۸}$$

۵- کاهش تعداد متغیرها

این نامعادله بیان می‌کند که با توجه به اینکه تقاضای هر مشتری حداکثر با یک خودرو تأمین می‌شود، با فرض همگن بودن خودروها، تخصیص خودروها با توجه به ترتیب شمارش مشتریان صورت گرفته؛ به این صورت که در دوره t برای مشتری ۱ تنها خودرو ۱ می‌تواند اختصاص داده شود و برای مشتری ۲ اگر خودرو ۱ فضا داشته باشد، خودرو ۱ و اگر نه خودرو ۲. این نامعادله معتبر تنها برای فرض مسئله مدل ارائه‌شده در مقاله [۶] صادق است؛ چراکه در این مدل فرض شده است که مشتریان به‌صورت خوشه‌ای هستند و مسافت بین مشتریان نسبت به مسافت هر یک از مشتریان با تولیدکننده بسیار ناچیز است، به‌طوری‌که می‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی نمود. به همین منظور در مدل مقاله [۶] محدودیت حذف زیرتور مطرح نشده است و ترتیب بین مراجعه اهمیت ندارد. به همین دلیل می‌توان بدون در نظر گرفتن ترتیب مشتریان خودروها را به آن‌ها تخصیص داد؛ این در حالی است که در مدل مسئله مسیریابی تولید ارائه‌شده در این مقاله این نامعادله معتبر نیست.

۵- تحلیل نتایج عددی

برای محاسبات از نرم‌افزار سیپلکس نسخه ۱۲/۶/۰ بر روی سیستم با پردازنده ۲/۳ گیگاهرتز و حافظه ۴ گیگابایت استفاده شده است. در این تحقیق جهت بررسی نتایج عددی، داده‌های مسائل نمونه با توجه به داده‌های موجود در تحقیقات مشابه انتخاب شده و ترکیب آن‌ها با استفاده از توزیع یکنواخت به‌طور تصادفی تولید شده است. مکان هر مشتری و تولیدکننده به‌صورت توزیع یکنواخت در بازه [۱۰۰ ۰] در صفحه فرض شده است. تقاضا در بازه [۲۰۰ ۱۰۰] به ازای هر مشتری در هر دوره به‌طور تصادفی محاسبه شده است. حداکثر ظرفیت خودروها متناسب با میانگین تقاضاها نسبت به هر دوره و خودرو ($a=\frac{\sum_{t}\sum_{i}d_{it}}{T*k}$) ضرب در توزیع یکنواخت [۲ ۱.۵] به

تعداد خودروها (برای مسئله ناهمگن) حاصل شده است. همچنین حداکثر ظرفیت هر مشتری از رابطه فوق (یعنی $[2a \quad 1.5a]$) به دست آمده است. حداکثر ظرفیت نگهداری نیز با استفاده از $[3a \quad 5a]$ محاسبه شده است. حداکثر ظرفیت تولید ۲ برابر حداکثر ظرفیت نگهداری تولیدکننده فرض شده است.

زودترین زمان تأمین تقاضا توسط رقیب در بازه [۳۰۰ ۲۰۰] و دیرترین زمان تأمین تقاضا توسط رقیب در بازه [۴۰۰ ۳۰۰] توسط توزیع یکنواخت تولید می‌شود. برای محاسبه مدت‌زمان لازم برای جابه‌جایی بین دو شهر توسط خودرو متناسب با مسافت بین دو شهر و سه برابر آن فرض شده است و در این داده‌سازی از زمان سپری‌شده در هر شهر چشم‌پوشی شده است. همچنین هزینه ثابت تخصیص خودرو و تقاضای مستقل از زمان نیز داده‌سازی نشده است.

۶- نتایج عددی

جدول ۱ به بررسی عملکرد هر یک از نامعادلات معتبر ارائه‌شده می‌پردازد. روابط ۲۷ و ۲۹ تنها برای مسئله مسیریابی تولید با وسایل نقلیه همگن صحیح هستند اما روابط ۲۸، ۳۰، ۳۷ و ۳۸ برای مسئله مسیریابی تولید با وسایل نقلیه ناهمگن نوشته شده‌اند. در این روابط می‌توان با حذف ضریب k از پارامترهای ω_k، τ_{ik} و τ_{ijk} روابط را برای مسئله مسیریابی تولید با وسایل نقلیه همگن، مناسب نمود.

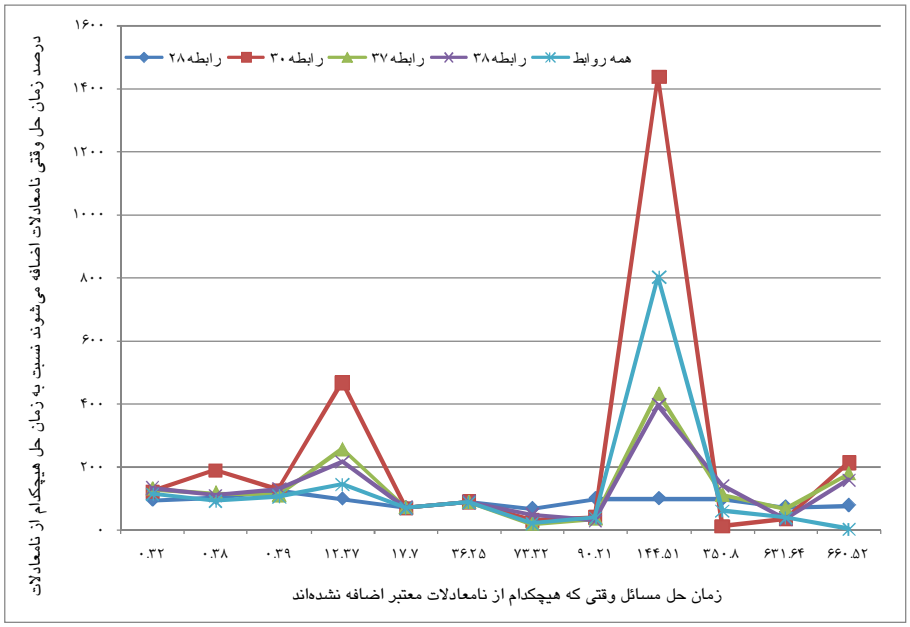
شکل ۱ خلاصه درصد تغییرات زمان را به ترتیب صعودی زمان حل مدل ساده ارائه می‌دهد.

ازآنجایی‌که عملکرد نامعادلات در ۲ مورد از مسائل بسیار بد بود، با حذف آن‌ها تغییرات با جزییات بیشتر در نمودار ۴ مشاهده می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱ قابل‌مشاهده است، نامعادلات برای مسائل کوچک با زمان‌های کمتر از ۱۵ ثانیه عملکرد مناسبی ندارند، ولی برای زمان‌های بعدازآن عملکرد رابطه ۲۸ ثبات بیشتری نسبت به تغییرات پارامترها داشته است اما زمان آن بسیار نزدیک به مدل ساده است. نوسان تغییرات در روابط ۳۰، ۳۷ و ۳۸ بسیار زیاد است، لکن در مقایسه با یکدیگر رابطه ۳۰ بهتر عمل نموده است. در حالت کلی بهترین عملکرد به در نظر گرفتن تمامی روابط هم‌زمان اختصاص می‌یابد. شکل ۱ با استفاده از داده‌های موجود رد سری ستون آخر جدول ۱ حاصل شده است. در جدول ۱ واحد زمان، ثانیه است.

اندازه مسئله در جدول ۱ به ترتیب از چپ بـه راسـت تعـداد مشـتریان، تعـداد دوره و تعداد خودرو در دسترس است. نتـایج نشـان مـی‌دهـد زمـان حـل شـدیداً وابسـته بـه پارامترهای مسئله است و بسته به داده‌های مسئله گاهی نامعادلات ارائـه‌شـده شـدیداً زمان حل را افزایش می‌دهند و گاهی شدیداً موجب کاهش زمان حل می‌شوند.

جدول ۱ بررسی عملکرد نامعادلات معتبر

اندازه مسئله	هیچ‌کدام		رابطه ۲۸		رابطه ۳۰		رابطه (۳۷)		رابطه ۳۸		همه روابط		درصد تغییرات زمان نسبت به هیچ‌کدام				
	زمان	تابع هدف	زمان	تابع هدف	زمان	تابع هدف	زمان	تابع هدف	زمان	تابع هدف	زمان	تابع هدف	رابطه ۲۸	رابطه ۳۰	رابطه ۳۷	رابطه ۳۸	همه روابط
۵۱.۲	۰/۳۲	-۵۸۲۳	۰/۳۱	-۵۸۲۳	۰/۳۹	-۵۸۲۳	۰/۴۲	-۵۸۲۳	۰/۴۳	-۵۸۲۳	۰/۳۷	-۵۸۲۳	۹۷	۱۲۲	۱۳۱	۱۳۴	۱۱۶
	۰/۳۸	-۴۱۸۵	۰/۳۹	-۴۱۸۵	۰/۷۲	-۴۱۸۵	۰/۴۵	-۴۱۸۵	۰/۴۲	-۴۱۸۵	۰/۳۵	-۴۱۸۵	۱۰۳	۱۸۹	۱۱۸	۱۱۱	۹۲
	۰/۳۹	-۲۹۱۲	۰/۴۹	-۲۹۱۲	۰/۵	-۲۹۱۲	۰/۴۳	-۲۹۱۲	۰/۵۱	-۲۹۱۲	۰/۴۲	-۲۹۱۲	۱۲۶	۱۲۸	۱۱۰	۱۳۱	۱۰۸
۵۲.۲	۷۳/۳۲	-۶۸۹۲	۵۰/۰۲	-۶۸۹۲	۲۳/۳۶	-۶۸۹۲	۱۴/۲۵	-۶۸۹۲	۳۶/۵	-۶۸۹۲	۱۶/۰۲	-۶۸۹۲	۶۸	۳۲	۱۹	۵۰	۲۲
	۹۰/۲۱	-۵۷۶۱	۹۰/۴	-۵۷۶۱	۳۶/۴۸	-۵۷۶۱	۳۲/۵۷	-۵۷۶۱	۲۷/۹۵	-۵۷۶۱	۳۴/۵۷	-۵۷۶۱	۱۰۰	۴۰	۳۶	۳۱	۳۸
	۱۲/۲۷	-۳۳۹۰	۱۲/۳۱	-۳۳۹۰	۵۷/۸۵	-۳۳۹۰	۳۱/۷۹	-۳۳۹۰	۲۶/۷۱	-۳۳۹۰	۱۸/۱۳	-۳۳۹۰	۱۰۰	۴۶۸	۲۵۷	۲۱۶	۱۴۷
۵۳.۲	۶۳۱/۶۴	-۱۲۷۰۷	۴۶۷/۶۱	-۱۲۷۰۷	۲۲۵/۸۷	-۱۲۷۰۷	۴۳۴/۳۶	-۱۲۷۰۷	۲۱۹/۲۴	-۱۲۷۰۷	۲۴۶/۸۵	-۱۲۷۰۷	۷۴	۳۶	۶۹	۳۵	۳۹
	۲۵۰/۸	-۱۳۳۴۴	۳۴۷/۵۳	-۱۳۳۴۴	۴۴/۱۷	-۱۳۳۴۴	۲۹۰/۸	-۱۳۳۴۴	۴۹۴/۰۱	-۱۳۳۴۴	۲۱۷/۰۴	-۱۳۳۴۴	۹۹	۱۳	۱۱۱	۱۴۱	۶۲
۵۴.۲	۶۶۰/۵۲	-۲۰۴۰۹	۵۱۹/۰۱	-۲۰۴۰۹	۱۴۰۹/۲	-۲۰۴۰۹	۱۱۸۶/۷	-۲۰۴۰۹	۱۰۴۴/۷	-۲۰۴۰۹	۳۰۴۲	-۲۰۴۰۹	۷۹	۲۱۳	۱۸۰	۱۵۸	۵
	۱۴۴/۵۱	-۱۹۸۱۰	۱۴۵/۸۶	-۱۹۸۱۰	۲۰۷۷/۵	-۱۹۸۱۰	۶۲۶/۳	-۱۹۸۱۰	۵۷۲/۲	-۱۹۸۱۰	۱۱۵۹/۳	-۱۹۸۱۰	۱۰۱	۱۴۳۸	۴۳۳	۳۹۶	۸۰۲
۷.۱.۲	۱۷/۷	-۵۸۸۲	۱۲/۶۲	-۵۸۸۲	۱۲/۴۶	-۵۸۸۲	۱۲/۶۶	-۵۸۸۲	۱۲/۷۳	-۵۸۸۲	۱۲/۶۵	-۵۸۸۲	۷۱	۷۰	۷۲	۷۲	۷۱
	۳۶/۲۵	-۷۲۹۱	۳۱/۹۵	-۷۲۹۱	۳۲/۲۵	-۷۲۹۱	۳۲/۱۸	-۷۲۹۱	۳۲/۷۱	-۷۲۹۱	۳۲/۱۳	-۷۲۹۱	۸۸	۸۹	۸۹	۹۰	۸۹



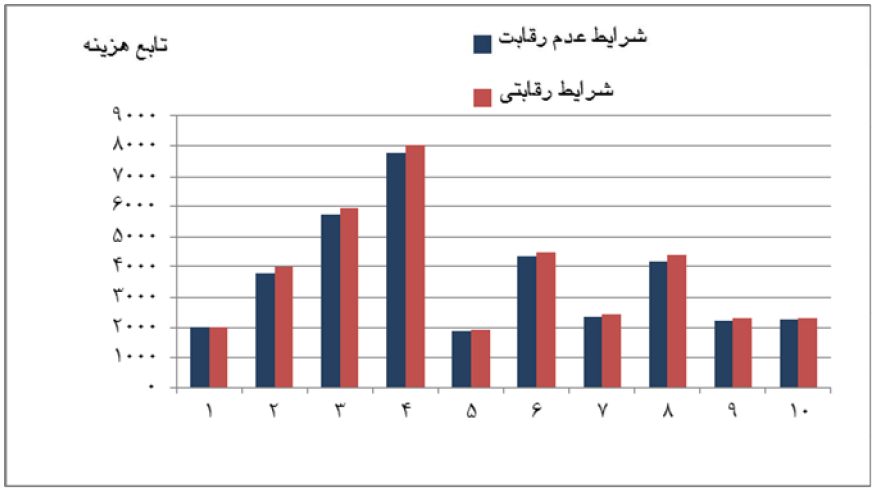
شکل ۱ درصد تغییرات زمان روابط نسبت به زمان حل، وقتی هیچ‌کدام از نامعادلات اضافه نشده‌اند

جدول ۲ به مقایسه نتایج حل مدل مسئله مسیریابی تولید رقابتی و مسئله در شرایط عدم رقابت می‌پردازد. در مسئله مسیریابی تولید در شرایط بدون رقابت، تمامی تقاضاها باید تأمین شوند. همچنین طبق مدل ارائه‌شده در این تحقیق، توزیع‌کننده موظف است تمامی تقاضای مشتری را در صورت رسیدن به‌موقع تأمین نماید. بنابراین جهت مقایسه دو شرایط رقابتی و عدم رقابت، بیشینه‌سازی تقاضای تأمین‌شده نسبت به کمینه‌سازی هزینه‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار است. بنابراین، ضریب سود تأمین تقاضا در تابع هدف (γ) برابر ۱۰ فرض شده است؛ این مقدار به‌طوری تعیین شده است که تأمین تقاضا از درجه اهمیت بیشتری برخوردار باشد. به دلیل تفاوت در تأمین تقاضا در جدول ۲، علاوه بر مجموع میزان توابع هدف، مقادیر هزینه‌ها و تقاضای تأمین‌شده ذکر شده است. در این جدول مقایسات برای ۱۰ نوع مسئله با سایزهای مختلف صورت گرفته است.

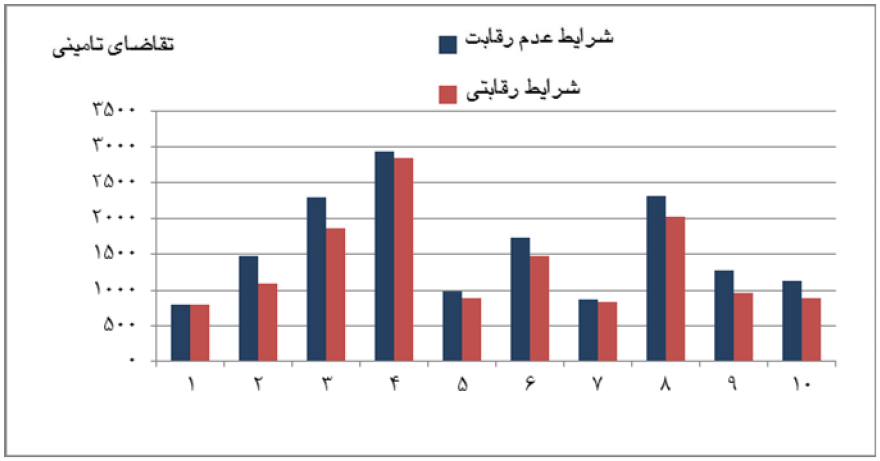
جدول ۲ مقایسه مسئله مسیریابی تولید رقابتی و شرایط عدم رقابت

	مسئله			شرایط عدم رقابت			شرایط رقابتی		
ردیف	تعداد مشتریان	تعداد خودرو	تعداد دوره	تقاضای تأمینی	هزینه‌ها	مجموع توابع	تقاضای تأمینی	هزینه‌ها	مجموع توابع
۱	۵	۲	۱	۷۹۸	۲۰۰۹	-۵۹۷۰	۷۸۳	۲۰۱۰	-۵۸۲۳
۲	۵	۲	۲	۱۴۶۶	۳۷۹۴	-۱۰۸۶۵	۱۰۸۹	۴۰۰۴	-۶۸۹۲
۳	۵	۲	۳	۲۲۸۸	۵۷۱۱	-۱۷۱۶۸	۱۸۶۵	۵۹۵۱	-۱۲۷۰۷
۴	۵	۲	۴	۲۹۳۰	۷۷۴۹	-۲۱۵۵۰	۲۸۴۴	۸۰۳۳	-۲۰۴۰۹
۵	۶	۲	۱	۹۹۳	۱۸۶۱	-۸۰۶۹	۸۷۵	۱۹۳۲	-۶۸۱۸
۶	۶	۲	۲	۱۷۱۴	۴۳۴۳	-۱۲۷۹۶	۱۴۷۳	۴۴۵۶	-۱۰۲۷۸
۷	۷	۳	۱	۸۶۹	۲۳۳۰	-۶۳۵۹	۸۲۸	۲۴۰۴	-۵۸۸۱
۸	۷	۳	۲	۲۳۱۳	۴۱۵۸	-۱۸۹۷۱	۲۰۱۸	۴۳۷۹	-۱۵۸۰۹
۹	۸	۳	۱	۱۲۷۳	۲۲۲۶	-۱۰۵۰۳	۹۵۱	۲۲۸۸	-۷۲۲۳
۱۰	۹	۳	۱	۱۱۲۲	۲۲۴۴	-۸۹۷۵	۸۷۹	۲۳۰۱	-۶۴۸۹

نمودارهای ۲ و ۳ برای سهولت تحلیل نتایج عددی مذکور در جدول ۲ رسم شده‌اند. نمودار ۲ به مقایسه مقادیر تابع هزینه در دو مدل مسیریابی تولید با فرض شرایط رقابت و عدم رقابت می‌پردازد. همچنین نمودار ۳ میزان تقاضای تأمین‌شده در مسائل مذکور را تحلیل می‌کند. با توجه به نمودار ۲ هزینه در تمامی شرایط رقابت بیشتر از شرایط عدم رقابت بوده است؛ چراکه توزیع‌کننده با توجه به محدودیت زمانی از جانب رقیب تلاش می‌کند با طی‌کردن مسیرهای کوتاه‌تر اما هزینه بیشتر، تقاضای بیشتری را تأمین نماید یا از دوره‌های پیشین ارسال نموده که در این حالت متحمل هزینه نگهداری می‌شود.



شکل ۲ مقایسه تابع هزینه‌ها در مسئله مسیریابی تولید با شرایط رقابتی و عدم رقابت



شکل ۳ مقایسه تقاضای تأمین‌شده در مسئله مسیریابی تولید با شرایط رقابتی و عدم رقابت

همچنین میزان تقاضای تأمین‌شده در شرایط عدم رقابت به دلیل تأمین تمامی تقاضاها بیشتر از تقاضای تأمین‌شده در شرایط رقابتی است. در شرایط رقابتی به دلایل محدودیت‌های تولید، توزیع و نگهداری و مقرون‌به‌صرفه نبودن، تمامی تقاضاها تأمین نمی‌شوند.

۷- نتیجه‌گیری

تولیدکننده باید در هر دوره تصمیم‌گیری کند که آیا محصول تولید نماید یا خیر و میزان اندازه انباشته مربوطه را تعیین نماید. در صورت تولید، متحمل هزینه آماده‌سازی ثابت و همچنین هزینه‌های تولید متغیر نسبت به واحد محصول می‌شود. علاوه بر این، اندازه انباشته نمی‌تواند از ظرفیت تولید تجاوز کند. توزیع از تولیدکننده به خرده‌فروشان توسط تعداد محدودی از وسایل نقلیه با ظرفیت محدود و هزینه‌های مسیریابی صورت می‌گیرد. تقاضا توسط رقیب در یک بازه زمانی مشخص تأمین شده و تبدیل به تقاضای ازدست‌رفته می‌شود. اگر محصولات در کارخانه یا در خرده‌فروشی‌ها ذخیره شوند، باید متحمل هزینه‌های نگهداری واحد موجودی شوند. یک مسئله مسیریابی تولید رقابتی کمک می‌کند تا تولیدکننده تصمیمات فوق را اتخاذ نماید. در این تحقیق، مسئله مسیریابی تولید رقابتی مدل‌سازی شده است. چندین نامعادله معتبر برای مسئله با وسایل نقلیه همگن و ناهمگن ارائه و میزان تأثیر آن‌ها در زمان حل دقیق به‌وسیله نرم‌افزار سیپلکس بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد زمان حل نرم‌افزار سیپلکس شدیداً وابسته به پارامترهای مسئله است و بسته به داده‌های مسئله گاهی نامعادلات ارائه‌شده شدیداً زمان حل را افزایش می‌دهند و گاهی شدیداً موجب کاهش زمان حل می‌شوند. با توجه به درجه سختی مسئله، استفاده از روش‌های فراابتکاری و ابتکاری برای حل مسائل در اندازه‌های بزرگ می‌تواند به‌عنوان زمینه مطالعات آتی معرفی شود. همچنین اضافه کردن فرض‌های واقعی‌ساز مانند در نظر گرفتن پارامترهای غیرقطعی نیز برای ادامه کار مناسب است.

۸- منابع

[1] Adulyasak, Y., Jean-François, C., and Raf, J. "The production routing problem: A review of formulations and solution algorithms." Computers & Operations Research, 55, 2015, 141-152.

[2] Adulyasak, Y., Jean-François, C., and Raf J. "Benders decomposition for production routing under demand uncertainty." Operations Research, 63, 2015, 851-867.

[3] Tavakkoli-Moghaddam, R., Gazanfari, M., Alinaghian, M., Salamatbakhsh, A., and Norouzi, N. "A new mathematical model for a competitive vehicle routing problem with time windows solved by simulated annealing." Journal of Manufacturing Systems, 30, 2011, 83-92.

[4] Norouzi, N., Tavakkoli-Moghaddam, R., Ghazanfari, M., Alinaghian, M., and Salamatbakhsh, A. "A new multi-objective competitive open vehicle routing problem solved by particle swarm optimization." Networks and Spatial Economics, 12, 2012, 609-633.

[5] Díaz-Madroñero, M., David, P., and Josefa, M. "Integrated production and routing planning decisions under uncertainty: a case study." 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, 2015.

[6] Senoussi, A., Nadia Kinza, M., Bernard, P., Nadjib, B., and Stéphane, D."Modeling and solving a one-supplier multi-vehicle production-inventory-distribution problem with clustered retailers." The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 85, 2016, 971-989.

[7] Adulyasak, Y., Jean-François, C., and Raf, J. "Formulations and branch-and-cut algorithms for multivehicle production and inventory routing problems." INFORMS Journal on Computing, 26, 2013, 103-120.

[8] Ghorbani, Z., Tavakkoli-Moghaddam, R., Vahdani, B., Minaee, M., and Mousavi, S. "Solving an Analysis Network Process Model for Selection of the Dispatching Rules by an Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Set." The Modares Journal of Management Research in Iran, 18, 2014, 195-214.

[9] Akbari, M. "a model for production and inventory control in crisis condition". The Modares Journal of Management Research in Iran, 19, 2016, 45-70.

[10] Mansoori, F., Abbasnejad, T., and Askarpour, H. “Designing an agile supply chain network in terms of demand dependence on price.” Modern Research in Decision Making, 2, 2017, 179-206.

[11] Bard, J.F., and Nananukul, N. "A branch-and-price algorithm for an integrated production and inventory routing problem." Computers & Operations Research, 37, 2010, 2202-2217.

[12] Montoya-Torres, J.R., Franco, J.L., Isaza, S.N., Jiménez, H.F., and Herazo-Padilla, N. "A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots." Computers & Industrial Engineering, 79, 2015, 115-129.

[13] Kulkarni, R. V., and Bhave, P. R. "Integer programming formulations of vehicle routing problems." European Journal of Operational Research, 20, 1985, 58-67.

[14] Pochet, Y., and Wolsey. L.A. "Polyhedra for lot-sizing with Wagner—Whitin costs." Mathematical Programming, 67, 1994, 297-323.