پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره 4، شماره 4، زمستان 1398

ارائه مدل کنترل موجودی برای کالاهای منسوخ شدنی با در نظر گرفتن تخفیف کلی و قیمت وابسته به مقدار سفارش

حسن زمانی باجگانی[1]، محمدرضا غلامیان[2*]

1- دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، گروه مهندسی سیستم، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران
2- دانشیار، گروه مهندسی سیستم، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

دریافت: 98/4/1 پذیرش: 98/8/12

چکیده

در این مطالعه، مدل کنترل موجودی منسوخ شدنی کالاهایی که خرده‌فروشی می‌شود و با وجود تخفیف کلی در سفارش بررسی شده است. خرده‌فروش‌ها کالاهای منسوخ شدنی را بر اساس قیمت خریدی که وابسته به مقدار سفارش است، خریداری می‌کنند. فرضیه این مقاله این است که بین تصمیم‌های مختلف، مقدار سفارش با توجه به احتمال منسوخ شدن کالا در هر لحظه و قیمت خرید کالا با توجه به استفاده از تخفیف وابستگی دارد، در نظر گرفتن این وابستگی‌ها در مدلی هماهنگ، باعث بهبود عملکرد خرده فروش‌ها می‌شود. هدف مدل، کم کردن هزینه موجودی خرده‌فروش‌ها ، از راه پیدا کردن مقدار بهینه قیمت خرید و مقدار سفارش‌دهی می‌باشد. هرچند مدل‌های تخفیف برای کالاهای فسادپذیر که کالا با قیمتی ثابت یا تغییرپذیر است و در حال نابودی هستند، توضیح داده‌شده‌اند؛ اما به‌کارگیری این مدل‌ها، برای کالاهای منسوخ شده‌ای که بر اساس توزیعی احتمالی در آینده دچار کاهش تقاضا می‌شود، بررسی نشده است. درحالی که این شرایط واقعی و بسیاری از خرده‌فروش‌ها با آن روبه‌رو می‌شوند و در چنین شرایطی خرده‌فروش‌ها نیاز دارند که مشتری‌ها را به خرید بیشتر تشویق کنند. در این مدل، طول زمان منسوخ شدن کالا، توزیع نمایی دارد و نوع منسوخ شدن کالا ناگهانی است. مدل به‌صورت ریاضی توسعه داده شده و جواب بهینه و تحدّب آن به‌وسیله مشتقات اول و دوم به‌دست آمده است. در انتها برای شفاف سازی مدل

*نویسنده مسئول مقاله: E-mail: Gholamian@iust.ac.ir

پیشنهادی، مثالی عددی ارائه شده و بررسی حساسیتی بر روی عامل‌های اصلی مدل انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل موجودی؛ تخفیف کلی؛ منسوخ شدن؛ قیمت وابسته به مقدار سفارش.

1- بیان مسئله

یکی از مسئله‌های مهم و اساسی در واحدهای خرده‌فروشی، برنامه‌ریزی سفارش‌ها و کنترل موجودی‌ها است. تأمین به مقدار، به‌موقع، با کیفیت و قیمت مناسب کالا به‌خصوص کالاهای منسوخ‌شدنی که تقاضای آن‌ها در حال کاهش و یکی از نگرانی‌های اصلی خرده‌فروش‌ها است. مدل‌های کنترل موجودی برای این توسعه داده‌شده‌اند که در مدل‌ها، اندازه اقتصادی و قیمت خرید تعیین می‌کنند که چه مقدار، با چه قیمتی و چه زمانی از محصول سفارش داده شود؛ به طوری که هزینه‌های سیستم که بیشتر شامل نگهداری، سفارش‌دهی و خرید است، کمتر شوند. عامل‌های زیادی در تنوع مدل‌های تعیین اندازه‌ی مقدار بیشتر سفارش‌دهی، اثر داشته‌اند و با تعریف این مسئله در حوزه کنترل موجودی، به ویژگی‌ها و فرضیه‌های گوناگونی برای مدل توجه شده است. ازجمله این ویژگی‌ها به نوع تقاضا، چشم‌انداز برنامه‌ریزی، نوع و تعداد کالا و قیمت خرید می‌توان اشاره کرد.

با توجه به بازارهای واقعی، به‌ویژه در صنایعی با فناوری بالا که محصول‌ها بعد از چند دوره تولید با پیدایش فناوری جدید دچار کاهش تقاضا شده و منسوخ می‌شوند و نیاز به تشویق مشتری برای خرید را دارند، پیشنهاد مدلی برپایه تخفیف باعث تشویق مشتری به تقاضای بیشتر می‌شود؛ بنابراین هدف این مقاله کنترل موجودی کالای منسوخ شدنی با توجه به تخفیف است.

یکی از راه‌های افزایش فروش شرکت‌ها، تخفیف قیمت محصول‌ها برای سفارش‌های بزرگ است؛ به‌طوری‌که هر چه سفارش‌ها بیشتر باشد، هزینه خرید کالا کمتر خواهد بود. در مدل تخفیف قیمت، مقدار سفارش بهتر برای انبار با توجه به قیمت محصول‌های مختلف تعیین می‌شود. در این فرضیه، قیمت هر واحد محصول، به حجم خرید ارتباط دارد. هدف این تخفیف، تشویق خریدارها برای خرید بیشتر، با در نظر گرفتن هزینه‌های نگهداری، هزینه‌های سفارش‌دهی، و احتمال منسوخ شدن کالا

می‌باشد. برای مثال: دارویی که مفید برای یک بیماری خاص است، عوارضی را هم ممکن است به همراه داشته باشد؛ از این‌رو تحقیق‌هایی برای ارائه داروی مشابه بدون عوارض در حال انجام است؛ در نتیجه داروی جدید وارد بازار شده و تقاضای داروی قبلی را با کاهش شدید روبه‌رو می‌کند؛ بنابراین داروخانه‌ها با آگاهی به اینکه داروی جدید هر لحظه ممکن است وارد بازار شود، سفارش‌های کمتری را به تولید کننده می‌دهند؛ در صورتی که اگر تولیدکننده به داروخانه تخفیف قیمت متناسبی با سفارش پیشنهاد کند، سفارش‌های بیشتری را دارد. همین موضوع در صنعت لوازم الکترونیکی مانند گوشی تلفن همراه هم وجود دارد. پیشرفت فناوری سبب این شده که گوشی‌های هوشمند با امکانات جدید جای خود را به گوشی‌های موجود می‌دهند و بازار با منسوخ شدن ناگهانی این گوشی‌ها روبه‌رو می‌کنند؛ بنابراین تعیین اندازه سفارش بهینه این دسته از کالاها، بسیار مهم است.

2- ادبیات تحقیق

بیشتر مدل‌های ارائه شده در مورد تخفیف در خرید کالا در مسئله‌های قطعی مطرح شده است. بعضی تحقیق‌های صورت گرفته در این زمینه به شرح زیر است: لین و هو[1][1]، مدلی برای پیدا کردن راهبرد بهینه نقطه فروش برای سیستم‌های کنترل موجودی با تخفیف قیمت توسعه دادند. دوان[2] و همکاران [2]، مدل کنترل موجودی در یک زنجیره تأمین با خرده‌فروش و فروشنده را ارائه کردند؛ درصورتی‌که اگر خرده‌فروش از فروشنده، مقدار کالای بیشتری را خریداری کند، فروشنده تخفیف کلی بر روی خرید ارائه می‌کند؛ درنتیجه هزینه‌های نگهداری به‌دست آمده از افزایش خرید پوشش داده می‌شود. ناین[3] و همکاران [3]، مدل کنترل موجودی تخفیف قیمت با مسیریابی وسیله نقلیه را توسعه دادند. ساکر[4] و همکاران [4]، مدل کنترل موجودی با متغیرهای مقدار و زمان سفارش‌دهی، تخفیف قیمت، کمبود، کیفیت فرایند و زمان تدارک کالا را ارائه کردند. زیسیس[5] و همکاران [5]، مسئله‌های مربوط به زنجیره تأمین را با توجه به اطلاعات ناهماهنگ و میزان تخفیف، بررسی کردند. عزیزی و

1. Lin and Ho
2. Duan et al.
3. Nguyen et al.
4. Sarkar et al.
5. Zissis et al.

جاهد [6]، مدلی را برای انتخاب بهترین تأمین‌کننده*ها* با توجه به تخفیف حجمی، با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها[1] با مرز دوگانه ارائه کردند.الفارس و گایزن[2] [7]،مدل کنترل موجودی با توجه به میزان تقاضای وابسته به قیمت فروش، هزینه نگهداری وابسته به زمان و هزینه خرید وابسته به میزان سفارش بر اساس تخفیف قیمت روی همه کالاها ارائه کردند. منصوری و همکاران [8]،زنجیره تأمین چند سطحی و چند دوره‌ای را با توجه به وابستگی تقاضا به قیمت محصول، ارائه کردند. جدیدی و همکاران [9]، مدل کنترل موجودی و قیمت گذاری را با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت، هزینه حمل‌ونقل و تخفیف در قیمت مدل‌سازی ارائه کردند. ونگاس و ونتورا[3] [10]، مدل هماهنگی در یک زنجیره تأمین نامتمرکز با استفاده از تخفیف قیمت و تقاضای وابسته به قیمت ارائه و با استفاده از روش نظری بازی‌های آن را حل کردند. به‌تازگی ونگ و همکارها [4] [11]، مدلی را جهت بهینه شدن راهبرد خرید با در نظر گرفتن تخفیف کلی و فروش از بین رفته ارائه کردند.

علاوه بر کمبود، به مسئله‌های دیگری مانند موضوع‌های وابسته به فسادپذیری کالا و بخش‌های زیست‌محیطی هم با موضوع تخفیف، توجه شده است. برای مثال، وی[5] [12]، مدل کنترل موجودی و قیمت گذاری کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن تخفیف و کمبود را ارائه کرد. بنرجی و آگراول[6] [13]، مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر که تقاضای آن‌ها با گذشت زمان به دلیل از بین رفتن تازگی کالا دچار کاهش می‌شود را با در نظر گرفتن تخفیف مقداری و کمبود فروش از دست رفته ارائه کردند. ژو[7] و همکاران[14]، زنجیره تأمین در شرایط کاهش آلودگی کربنی محیط زیست با توجه به تخفیف بین خرده‌فروش و فروشنده در دو حالت متمرکز و نامتمرکز بررسی کردند.

در بعضی از تحقیقات، پارامترهای *نامطمئن* به صورت احتمالی یا فازی در مدل توجه شده است؛ برای مثال محمدی و رجبی[15]، مدلی را با استفاده از رویکرد زنجیره مارکف و برنامه‌ریزی پویا با در نظرگیری تخفیف‌های مالیاتی برای افزایش

1. Data Envelopment Analysis (DEA)
2. Alfares, and Ghaithan
3. Venegas, and Ventura
4. Wang et al.
5. Wee
6. Banerjee, and Agrawal
7. Xu et al.

درآمدهای مالیاتی دولت ارائه کردند. تمجیدزاد و همکاران [16]، مدل کنترل موجودی با توجه به تقاضای احتمالی و تخفیف در قیمت را ارائه دادند. محمدی وجدان و ژنوس[1] مدلی را ارائه کردند که در آن یک خرده‌فروش با فروش فصلی و مقدار تقاضای نامطمئن روبه‌رو است و کالای خود را از فروشنده‌ها با پیشنهادهای تخفیف مختلف و با ظرفیت تولید محدود دریافت می‌کنند که هر کدام برای بهینه سازی هزینه‌های تدارکات خود هستند؛ با توجه به نبود تحدّب و تقعر وابسته به تابع هدف از الگوریتم‌های فرا ابتکاری برای حل مدل استفاده شده است[17]. چن و هو[2] [18]، مدل کنترل موجودی پسر روزنامه فروش، فازی را با توجه به تخفیف قیمت ارائه کردند. صادقی و همکاران [19]، مدل کنترل موجودی با مدیریت فروشنده را با تقاضای فازی با توجه به تخفیف قیمت و کمبود مدل سازی ارائه کردند. کاندو[3] و همکاران [20]، مدل کنترل موجودی را در شرایط تولیدی و با تقاضای فازی با توجه به تخفیف قیمت ارائه کردند. بهنامیان و بشر [21]، مدلی در زنجیره تأمین سه سطحی با توجه به تخفیف کلی و وابستگی تقاضا به قیمت فروش و هزینه بازاریابی فازی برپایه نظریه بازی‌ها ارائه کردند. تمجیدزاد و میرمحمدی [22]، مدل کنترل موجودی چند محصولی را با توجه به تخفیف در شرایط تقاضای تصادفی و محدودیت منابع توسعه دادند. در ادامه، تمجیدزاد و میرمحمدی [23]، مدل کنترل موجودی با توجه به تقاضای تصادفی گسسته با محدودیت منبع و تخفیف قیمت، برای یک محصول را ارائه کردند.

با توجه به بررسی‌های انجام شده، پژوهش‌های زیادی درباره تخفیف روی کالای منسوخ شدنی ارائه نشده است؛ در صورتی که، یکی از مهمترین و کاربردی‌ترین موضوع‌ها درباره کالاهای منسوخ شدنی، موضوع تخفیف است؛ زیرا خرده‌فروش‌ها با ارائه تخفیف، سعی دارند کالای بیشتری را به فروش رسانده و احتمال اینکه تعداد کالای منسوخ شده باقیمانده را کاهش بدهند؛ فقط پژوهش انجام شده در این زمینه، مربوط به مقاله دلفت و وایال[4] می‌باشد[24]، که درآن با استفاده از تابع تخفیف نزولی، مدل موجودی کالای منسوخ شدنی را ارائه کردند؛ بنابراین یکی

1. Geunes
2. Chen, and Ho
3. Kundu et al.
4. Delft, and Vial

از مهمترین و کاربردی‌ترین موضوع*هایی* که می‌تواند درباره کالای منسوخ شدنی برای تشویق خریدار به خرید بیشتر بررسی شود؛ موضوع تخفیف می‌باشد. در این مقاله ابتدا مسئله خرید با تخفیف شرح داده می‌شود و سپس در قسمت سوم مدل‌سازی مسئله روی کالای منسوخ شدنی ناگهانی، معرفی می‌شود. سپس در بخش چهارم حل مسئله و بررسی حساسیت روی نمونه داده‌های ارائه شده صورت می‌گیرد. بخش پنجم هم به جمع‌بندی و ارائه نتیجه‌های تحقیق پرداخته می‌شود.

3- مدل‌سازی

در مدل‌های پایه‌ای تعیین اندازه سفارش با توجه به تخفیف کلی، قیمت واحد کالای سفارش داده شده با تغییر یک بازه از سفارش تغییر می‌کند؛ ولی در این مقاله مدلی بررسی می‌شود که قیمت واحد، تابع مقدار سفارش شده باشد. از طرفی در مدل‌های کنترل موجودی با تقاضای ثابت بیشتر به چشم‌انداز برنامه‌ریزی محدود توجه می‌شود و مدل‌سازی به گونه‌ای است که هزینه‌های موجودی در یک دوره محاسبه شده است و در تعداد دوره‌ها ضرب می‌شود؛ اما در این مطالعه با توجه به اینکه کالای بررسی شده ماهیت منسوخ شدنی دارد و دوره منسوخ شدن کالا احتمالی است؛ چشم‌انداز برنامه‌ریزی نامحدود بوده و روش مدل‌سازی به‌گونه‌ای است که ابتدا، هزینه‌های موجودی در اولین دوره محاسبه شده است؛ سپس هزینه‌های موجودی در هر یک از دوره‌های بعد با در نظر گرفتن احتمال منسوخ نشدن کالا در دوره‌های قبل محاسبه می‌شود و با توجه به اینکه احتمال منسوخ نشدن بر اساس توزیع نمایی، مقداری ثابت است؛ بنابراین کل هزینه‌های موجودی در چشم‌انداز نامحدود با پیروی از تصاعد هندسی و با توجه به مشخص بودن هزینه‌های موجودی دوره اول و احتمال منسوخ نشدن کالا در هر دوره، محاسبه می‌شود.

چهارچوب اصلی مسئله پیش رو به این ترتیب است: فروشنده محصول خود را می‌فروشد و به خریدار این امکان را می‌دهد تا با دریافت کالای بیشتر هزینه خرید کمتری را پرداخت کند. از طرف دیگر، کالای ارائه شده با تابع توزیع نمایی منسوخ می‌شود و این نوع منسوخ شدن کالا، ناگهانی است و تعداد کالاهایی منسوخ شده باقی می‌مانند که باعث ایجاد هزینه‌هایی می‌شوند؛ بنابراین خریدار باید بهترین مقدار سفارش را با توجه به احتمال منسوخ شدن کالا و کاهش هزینه خرید حاصل از

سفارش بیشتر انتخاب کند؛ در نتیجه، مدلی که در این بخش معرفی می‌شود، دارای فرضیه‌های زیر است:

- تقاضا ثابت است.
- فقط برای یک محصول مدل‌سازی انجام می‌گیرد.
- کمبود مجاز نیست.
- پرداخت بعد از دریافت سفارش انجام می‌شود.
- منسوخ شدن به‌صورت ناگهانی است.
- تابع توزیع احتمالی طول عمر منسوخ شدن کالا، نمایی در نظر گرفته شده است.
- چشم‌انداز برنامه‌ریزی نامحدود می‌باشد.

مدل ارائه شده در این پژوهش، توسعه مدل جاگلاکر و لی[1] [25] است که یکی از اولین مدل‌هایی که به بررسی منسوخ‌شدن ناگهانی پرداخته است. در این مقاله، تخفیف هم در مدل در نظر گرفته شده است؛ اما نوع تخفیف به صورت یک تابع پیوسته وابسته به مقدار سفارش نیست؛ بنابراین در این پژوهش مدل تخفیفی در نظر گرفته شده که به صورت تابع نمایی وابسته به مقدار سفارش است؛ که تاکنون در هیچ پژوهش وابسته‌ای پیشنهاد نشده است.

در این مدل مقدار بهینه سفارش و در نتیجه طول بهینه زمان سفارش‌دهی متغیر تصادفی مستقل هستند؛ همچنین هزینه خرید کالا که در این مدل وابسته به مقدار سفارش در نظر گرفته شده هم متغیر تصادفی و مستقل است؛ پس کمتر کردن هزینه‌های یک دوره برابر کمتر کردن هزینه‌های کل دوره است؛ در نتیجه مسئله را برای یک دوره مدل‌سازی کرده و آن‌ها را برای طول عمر انتظاری محصول عمومیت می‌دهیم. پارامترهای استفاده شده در این مقاله به‌صورت زیر است:

3-1- پارامترها

L: طول عمر انتظاری محصول (سال).

D: مقدار تقاضای یک سال.

A: هزینه سفارش‌دهی ($).

1. Joglekar and Lee

H: هزینه نگهداری هر واحد کالا در طول یک‌سال.

$C(Q)$: تابع هزینه خرید هر واحد کالا ($) که وابسته به مقدار سفارش است:

$$C(Q) = \delta\alpha e^{-r\mathrm{Q}}$$

δ, r : ضریب*های* عادی کردن هزینه خرید.

C_s: هزینه هر واحد کالای منسوخ شده در دست، در زمان دلخواه t ($).

P_s: احتمال اینکه در مدت دوره پیش‌رو کالا منسوخ نشود.

TC_c: جمع هزینه‌های خرید، سفارش‌دهی، نگهداری و منسوخ‌شدنی در یک دوره ($).

TC_L: کل هزینه موجودی (هزینه‌های خرید، سفارش‌دهی، نگهداری و منسوخ شدنی در مدت دوره انتظار منسوخ شدن کالا) ($).

3-2- متغیرهای تصمیم

Q: مقدار سفارش بهینه

هدف مسئله، کم کردن هزینه‌های خرید، سفارش‌دهی، نگهداری و منسوخ شدن کالا است که هر یک از اجزاء تابع هدف به تفکیک زیر مدل‌سازی می‌شود:

3-3- هزینه خرید

هزینه حاصل ضرب اندازه مقدار سفارش اقتصادی (Q) کالا در هزینه هر واحد خرید C(Q) است که مطابق با عبارت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_P=cQ = Q\delta\alpha e^{-r\mathrm{Q}} \quad (1)$$

3-4- هزینه کالاهای منسوخ شده

هزینه‌های منسوخ شدنی از ضرب احتمال منسوخ شدن کالا در زمان t در تعداد کالای باقیمانده در زمان t به ازای هر واحد هزینه منسوخ شدن به‌دست می‌آید؛ بنابراین با توجه به اینکه در ابتدای دوره به تعداد Q کالا سفارش داده می‌شود؛ اگر

تا زمان t به‌اندازه tD آن‌ها مصرف شده باشد؛ تعداد Q-tD کالا به هزینه هر واحد C_s منسوخ می‌شود؛ در نتیجه کل هزینه‌های منسوخ شدن کالا عبارت‌اند از:

$$TC_c=\int_0^{\frac{Q}{D}}[Q-(tD)](C_s)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=(D(-1+e^{-\frac{Q}{DL}})L+Q)C_s \quad (2)$$

3-5- هزینه‌های نگهداری

با توجه به اینکه ممکن است کالا در مدت دوره بررسی، یا در دوره‌های بعد منسوخ شود؛ بنابراین هزینه‌های نگهداری موجودی برای دو حالت محاسبه می‌شود 1- حالتی که کالا در مدت دوره منسوخ شود 2- حالتی که کالا در دوره/ دوره‌های بعد منسوخ شود:

1- میزان موجودی ابتدای دوره برابر با Q است؛ بنابراین درصورتی‌که منسوخ شدن در زمان t $[0<t<\frac{Q}{D}]$، با در نظر گرفتن احتمال توزیع نمایی با پارامتر$(\frac{1}{L})$، اتفاق افتد، میزان موجودی در زمان t برابر است با Q-tD و میانگین موجودی در طول یک دوره عبارت است از: $\left(\frac{tD}{2}\right)-Q$ ؛ بنابراین هزینه‌های نگهداری در این حالت عبارت است از:

$$TC_{H1}=\int_0^{\frac{Q}{D}}\left[Q-\left(\frac{tD}{2}\right)\right](Ht)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=\frac{H(2L(-D\,L+Q)+\frac{e^{-\frac{Q}{DL}}(2D^2\,L^2-Q^2)}{D})}{2} \quad (3)$$

2- درصورتی‌که منسوخ شدن در زمان t $[t>\frac{Q}{D}]$، با در نظر گرفتن احتمال توزیع نمایی با پارامتر $(\frac{1}{L})$ اتفاق افتد، میانگین موجودی در مدت دوره برابر با $Q/2$ است؛ بنابراین هزینه‌های نگهداری در این حالت عبارت است از:

$$TC_{H2}=\int_{\frac{Q}{D}}^{\infty}\left[\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{D}\right)\right](H)\left[\left(\frac{1}{L}\right)e^{-t/L}\right]dt=\frac{H\ Q^2\ e^{-\frac{Q}{DL}}}{2D} \quad (4)$$

3-6- کل هزینه‌های یک دوره

کل هزینه‌های دوره، جمع هزینه‌های سفارش‌دهی، خرید، منسوخ شدن و نگهداری کالا، با توجه به روابط (1)، (2)، (3) و (4) به شرح زیر است:

$$TC_c = A + Q\delta\alpha e^{-rQ} + (H\,L\,C_p + C_s)*(Q - D\,L(1-e^{-\frac{Q}{D*L}})) \quad (5)$$

روابط به‌دست‌آمده بالا فقط برای یک دوره محاسبه شده بود. اکنون می‌خواهیم این روابط را برای کل دوره‌ها عمومیت داده شود.

متوسط هزینه‌های موجودی کل دوره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$TC_L = C_c + C_c P_s + C_c (Ps)^2 + \ldots \Rightarrow C_L = \frac{C_c}{(1-P_s)} \quad (6)$$

اما از طرفی؛

$$P_s = \int_{\frac{Q}{D}}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L}\right) e^{-\frac{t}{L}}\right] dt = e^{-\frac{Q}{DL}} \quad (7)$$

در نتیجه با توجه به عبارت‌های 6 و 7 خواهیم داشت:

$$TC_L = \frac{Cc}{(1-e^{-\frac{Q}{DL}})} \quad (8)$$

$$TC_L = \frac{Q\delta e^{-rQ} + A + (HL + C_s) * \left(Q - DL\left(1 - e^{-\frac{Q}{D*L}}\right)\right)}{(1 - e^{-\frac{Q}{DL}})} \quad (9)$$

با توجه به ثابت بودن هزینه نگهداری و هزینه منسوخ شدنی فرض می‌کنیم:

$$M = HL + C_s \quad (10)$$

همچنین برای ساده‌سازی در اثبات محدّب‌پذیری تابع، از بسط تیلور[1] زیر استفاده می‌کنیم:

[1] Taylor

$$e^{-\frac{Q}{DL}} \approx 1 - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{DL}} + \frac{Q^2}{2D^2L^2} \tag{11}$$

با جانشینی روابط (10) و (11) در عبارت 9 داریم:

$$TC_L = \frac{2D^2L^2(\delta(e^{-rQ}) + M)}{(2DL - Q)} + \frac{2D^2L^2A}{(2DLQ - Q^2)} - \mathrm{DL}M \tag{12}$$

برای به‌دست آوردن جواب بهینه، از تابع هدف مشتق اول گرفته شده و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial TC_L}{\partial \mathrm{Q}} = (M + e^{-Qr}\delta) - A(2DL - 2Q) - (2DL - Q)e^{-Qr}r\delta \tag{13}$$

برای اثبات محدّب پذیری تابع هدف ضروری است که مشتق دوم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 TC_L}{\partial \mathrm{Q}^2} = {} & 2AD^2L^2\left(\frac{2(2DL - 2Q)^2}{(2DLQ - Q^2)^3} + \frac{2}{(2DLQ - Q^2)^2}\right) \\ & + 2D^2L^2\left(\frac{2(M + e^{-Qr}\delta)}{(2DL - Q)^3} - \frac{2e^{-Qr}r\delta}{(2DL - Q)^2} + \frac{e^{-Qr}r^2\delta}{2DL - Q}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

با توجه به مثبت بودن کلیه پارامترها و با توجه به اینکه $2DL > 2Q$ است؛ بنابراین کلیه مخرج‌ها و کلیه عبارت‌ها به جز $\left(-\frac{2e^{-Qr}r\delta}{(2DL-Q)^2}\right)$ مثبت هستند؛ بنابراین با توجه به دو جمله آخر عبارت 18 داریم:

$$-\frac{2e^{-Qr}r\delta}{(2DL - Q)^2} + \frac{e^{-Qr}r^2\delta}{2DL - Q} = \frac{e^{-Qr}r\delta(-2 + r(2DL - Q))}{(2DL - Q)^2} \tag{15}$$

اگر $r(2DL - Q) > 2$ باشد عبارت بالا بزرگتر از صفر است که این فرض در شرایط طبیعی حاکم بر مسئله برقرار است.

3-7- حل مدل

برای حل مدل مشتق اول را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial TC_L}{\partial Q} = (M + e^{-Qr}\delta) - A(2DL - 2Q) - (2DL - Q)e^{-Qr}r\delta = 0 \quad (16)$$

⇨

$$r\delta Qe^{-Qr}r\delta + e^{-Qr}(\delta - 2DLr\delta) + 2AQ - 2ADL + M = 0 \quad (17)$$

⇨

$$e^{-Qr} = \frac{-(2AQ - 2ADL + M)}{r\delta Q + (\delta - 2DLr\delta)} \Rightarrow Q = \frac{-ln\frac{-(2AQ - 2ADL + M)}{r\delta Q + (\delta - 2DLr\delta)}}{r} \quad (18)$$

با توجه به عبارت بالا و با توجه به خطی نبودن معادله مشتق اول حل مدل با استفاده از مشتق اول امکان‌پذیر نیست. برای حل مدل گفته شده مثال عددی زیر انتخاب شده و نتیجه‌ها بر اساس آن بررسی می‌شود. این مثال با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا[1] 6.0 در یک کامپیوتر مدل 2012م. پنتیوم[2] Core I-5 با ویندوز[3] 7 و CPU، 2,9 گیگاهرتز و با رم 2 حل شده است.

4- نتیجه حل و بررسی حساسیت

منبع داده‌ها در مثال حل شده مورد مطالعه، واقعی و در صنعت گوشی تلفن همراه است. مشکل منسوخ شدن کالاها، یکی از مسئله های مهم و اساسی تأثیرگذار بر درآمد و هزینه‌های آن ها است. در اصل طرح این موضوع برپایه نیاز احساس شده در بازار به‌وجود آمده و سپس موضوع در قالب مدل ریاضی گسترش داده شده و در این مدل، با توجه به احتمال منسوخ شدن فناوری بر اساس توزیع احتمال نمایی، درپی کم کردن هزینه‌های موجودی با توجه به پارامترهای زیر است.

---

[1] Mathematica
[2] Pentium
[3] Windows

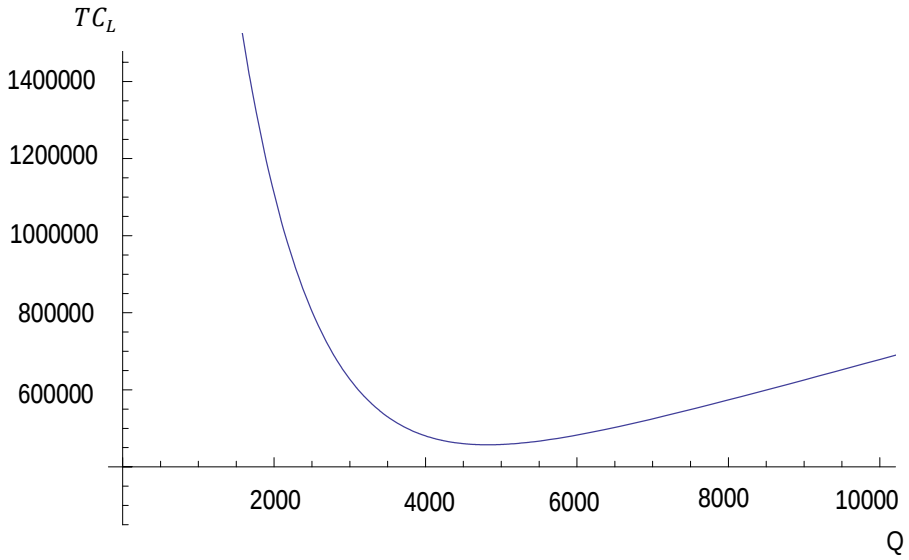
اطلاعات اولیه پارامترهای مسئله به شرح زیر است:

$A = 200, D = 10000, H = 5, L = 4, \delta = 1\,00, C_s = 80, r = 0{,}001$

با حل مسئله مقدار بهینه سفارش دهی ($\mathbf{Q}^*$) و کمترین هزینه‌های موجودی ($\boldsymbol{TC_L}^*$) عبارت‌اند از:

$TC_L^* = 290899$, $Q^* = 4409{,}6$

نمودار به‌دست آمده از حل مثال بالا بـه شـرح زیـر اسـت؛ همچنـین در نمـودار 1 مشخص است که تابع محدّب‌پذیر بوده و دارای نقطه‌ای بهینه و ویژه است:



نمودار 1 تغییر هزینه‌های موجودی بر اساس تغییر مقدار سفارش

اکنـون بـه بررسـی حساسـیت مـدل مـی‌پـردازیم. در ایـن بخـش بـه حساسـیت پارامترهای هزینه از جمله هزینه‌های سفارش‌دهی، خرید، منسوخ شدنی، و نگهـداری بررسی می‌شود؛ همچنین، به تغییر تقاضا و مدت دوره منسـوخ شـدن (L) هـم توجـه

شده است. از دیگر پارامترهای برای بررسی، حساسیت ضرایب عادی‌سازی هزینه خرید است که تأثیر مستقیم بر میزان سفارش‌دهی و هزینه‌های موجودی دارند. در این تحقیق، به دنبال تأثیر تغییر هر یک از پارامترها در مقدار بهینه تابع هستیم؛ که نتیجه آن در جدول زیر مشاهده می‌شود، مقدار پایه هر یک از پارمترها به شرح زیر است؛ همچنین فرض بر آن است که در هر لحظه فقط یک پارامتر تغییر می‌کند:

$A = 200, R = 10000, \delta = 200, C_s = 50, H = 29, L = 4, r = 0{,}001,$

جدول 1 بررسی حساسیت متغیرهای تصمیم بر اساس تغییر پارامترها

Parameter	value	c	Q	TC_L
h	10	74,3908	988,985	4103810
	15	74,4848	987,722	4113820
	20	74,5789	986,459	4123810
	25	74,6732	985,196	4133790
	30	74,7675	983,933	4143760
	35	74,8620	982,67	4,153720
C_s	20	74,4377	988,354	4108820
	40	74,5318	987,091	4118820
	60	74,6260	985,828	4128800
	80	74,7203	984,565	4138780
	100	74,8147	983,302	4148740
	120	74,9093	982,039	4158690
δ	200	74,5789	986,459	4123810
	250	93,0895	987,899	5136470
	300	111,6001	988,86	6149120
	350	130,1108	989,546	7161760
	400	148,6216	990,061	8174390
	500	185,6429	990,783	10199600

ادامه جدول 2

Parameter	value	c	Q	TC_L
L	7	74,2721	990,581	7159520
	6	74,3400	989,668	6147590
	5	74,4352	988,388	5135680
	4	74,5789	986,459	4123810
	3	74,8206	983,223	3112020
	2	75,3125	976,671	2100420
A	200	74,5789	986,459	4123810
	250	74,5600	986,712	4125870
	300	74,5412	986,965	4127920
	350	74,5223	987,218	4129970
	400	74,5035	987,47	4132020
	500	74,4660	987,974	4136120
r	0,0005	74,7377	1942,08	4236560
	0,001	74,5789	986,459	4123810
	0,005	73,4226	200,417	4063140
	0,01	72,9618	100,838	4091330
	0,05	79,3067	20,909	4393380

اکنون بر اساس نتیجه‌های مشاهده شده در جدول تأثیر تغییر هر کدام از پارامترها بر مقدار بهینه سفارش‌دهی و در نتیجه هزینه بهینه خرید و هزینه‌های بهینه موجودی ارائه می‌شود:

افزایش h: افزایش هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان باعث کاهش مقدار سفارش‌دهی می‌شود، کاهش مقدار سفارش‌دهی هم باعث کاهش مقدار تخفیف فروشنده روی هزینه خرید کالا می‌شود؛ در نتیجه هزینه خرید هر واحد کالا افزایش یافته و به طور کلی باعث افزایش هزینه‌های موجودی می‌شود.

افزایش C_s: افزایش هزینه منسوخ شدن کالا نیز باعث کاهش مقدار بهینه سفارش‌دهی می‌شود؛ زیرا با افزایش هزینه‌های ناشی از منسوخ شدن کالا، خرده‌فروش‌ها مقدار کالای کمتری را سفارش می‌دهند؛ تا در صورت بروز منسوخ شدن کالا احتمال اینکه کالا دچار منسوخ شدن شود کمتر شود. افزایش هزینه منسوخ شدن کالا باعث افزایش هزینه‌های موجودی می‌شود.

افزایش δ: افزایش ضریب عادی‌سازی هزینه خرید باعث افزایش مقدار سفارش‌دهی می‌شود؛ زیرا با افزایش ضریب عادی‌سازی خرید، هزینه خرید هر واحد کالا افزایش می‌یابد؛ بنابراین خرده‌فروش‌ها برای کاهش تأثیر افزایش قیمت خرید، مقدار سفارش را افزایش می‌دهند تا شامل تخفیف بیشتری شوند. به عبارتی تأثیر افزایش قیمت کالا را خنثی کنند؛ به‌طور کلی افزایش ضریب عادی‌سازی باعث افزایش هزینه‌های موجودی در حالت بهینه می‌شود.

و افزایشL : افزایش دوره انتظار منسوخ شدن کالا نیز باعث افزایش مقدار بهینه سفارش‌دهی می‌شود. زیرا با افزایش دوره انتظار منسوخ شدن کالا، احتمال منسوخ شدن کالا کاهش یافته؛ در نتیجه خرده‌فروش‌ها مقدار بیشتری را سفارش می‌دهند، افزایش میزان سفارش‌دهی باعث کاهش هزینه خرید می‌شود. روشن است که با توجه به اینکه خرده فروش‌ها در دوره‌های بیشتری سفارش دهی می‌کنند؛ به‌طور کلی هزینه‌های بهینه موجودی با افزایش دوره انتظار منسوخ شدن کالا دچارافزایش می‌شود؛ اما با عادی‌سازی هزینه‌ها به ازای یک سال متوجه می‌شویم، هزینه‌های انتظار موجودی، به ازای یک سال کاهش می‌یابد.

افزایش A: افزایش هزینه‌های سفارش‌دهی باعث افزایش مقدار سفارش می‌شود؛ زیرا با افزایش مقدار سفارش، تعداد دفعه‌های سفارش‌دهی کمتر می‌شود؛ بنابراین مقدار سفارش‌دهی افزایش می‌یابد؛ همچنین افزایش مقدار سفارش باعث افزایش تخفیف و کاهش هزینه خرید و افزایش هزینه سفارش‌دهی باعث افزایش هزینه‌های موجودی می‌شود.

افزایش r: افزایش ضریب کشش خرید بر اساس مقدار سفارش باعث کاهش مقدار سفارش‌دهی می‌شود. اما با کاهش مقدار سفارش‌دهی با توجه به اینکه نسبت کاهش مقدار موجودی به اندازه افزایش r نیست؛ بنابراین هزینه خرید با افزایش r کاهش می‌یابد؛ اما افزایش مقدار r رابطه مستقیم با افزایش هزینه‌های موجودی ندارد.

5- نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده

مطالعه‌های *مختلف* و زیادی درباره تخفیف کلی انجام شده است؛ ولی پژوهش‌های بسیار محدودی درباره تخفیف کلی با توجه به هزینه خرید وابسته به مقدار سفارش مطرح شده است، در اکثر مدل‌های تخفیف کلی قیمت خرید وابسته به بازه‌ای از میزان سفارش در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر مطالعه‌های بسیار کمی درباره کالاهای منسوخ شدنی به ویژه با توجه به تخفیف، انجام شده است؛ بنابراین در این پژوهش مدل کنترل موجودی با در نظر گرفتن قیمت خرید وابسته به مقدار سفارش در زمینه کالاهای منسوخ شدنی، بررسی شده است. مسئله ابتدا به‌صورت ریاضی به تفکیک هزینه‌های منسوخ شدنی، نگهداری و هزینه خرید با توجه به احتمال منسوخ شدن کالا در هر لحظه از زمان برای یک دوره فرموله شد و سپس با استفاده از تصاعد هندسی، کل هزینه‌های موجودی در چشم‌انداز نامحدود مسئله، مدل‌سازی شد؛ در نتیجه پس از اثبات محدّب‌پذیری، مثال‌هایی برای تشریح و بررسی حساسیت مدل، ارائه شد. برای توسعه مدل و تحقیق‌های آینده پیشنهادهای زیر ارائه می‌شوند:

1- می‌توان به جای تقاضای ثابت، تقاضا را احتمالی یا به‌صورت تقاضای وابسته به پارامترهایی مثل قیمت، زمان یا سطح موجودی در نظر گرفت.

2- می‌توان شرایط دیگر مانند، تأخیر در پرداخت را برای تشویق خرید مشتری با توجه به اینکه نوع کالا، منسوخ شدنی است، در مدل در نظر گرفت.

3- هزینه نگهداری به‌صورت هزینه ثابت هر واحد کالا در سال است که می‌توان هزینه نگهداری را به‌صورت ضریبی از هزینه خرید در نظر گرفت.

6- منبع‌ها

[1] Y.J.Lin, and C.H. Chia-Huei Ho, "Integrated inventory model with quantity discount and price-sensitive demand", TOP, vol. 19, pp. 177–188, 2011.

[2] Y. Duan, J. Luo, and J. Huo, “Buyer–vendor inventory coordination with quantity discount incentive for fixed lifetime product, international journal Production Economics”, vol. 128, pp. 351–357, 2010.

[3] H.N. Nguyen, C.E. Rainwater, S.J. Mason, and E.A. Pohl, ‘Quantity discount with freight consolidation”, Transportation Research Part E., vol. 66, pp. 66–82, 2014.

[4] B. Sarkar, B. Mandal, and S. Sarkar, “Quality improvement and backorder price discount under controllable lead time in an inventory model”, Journal of Manufacturing Systems., vol. 35, pp. 26–36, 2015.

[5] D. Zissis, G. Ioannou, and A. Burnetas, “Supply chain coordination under discrete information asymmetries and quantity discounts”, Omega, vol. 53, pp. 21–29, 2015.

[6] H. Azizi, and R. Jahed, Supplier Selection in Volume Discount Environments in the Presence of Both Cardinal and Ordinal Data: A New Approach Based On Double Frontiers DEA, Management Research in Iran, vol. 19, no. 3, pp. 185-210, 2015. (In Persian).

[7] J.K. Alfares, and A.M. Ghaithan, “Inventory and Pricing Model with Price-Dependent Demand, Time-Varying Holding Cost, and Quantity Discounts”, Computers & Industrial Engineering., vol. 94, pp. 170-177, 2016.

[8] F. Manoouri, T. Abbasnejad and H.R. Askarpour, “Designing an agile supply chain network in terms of demand dependence on price”, Modern Research in Decision Making., vol. 2, no. 3, pp. 50-75, 2017. (In Persian)

[9] O. Jadidi, M.T. Jaber, and S. Zolfaghari, “Joint pricing and inventory problem with price dependent stochastic demand and price discounts”, Computers & Industrial Engineering., vol. 114, pp. 45-53, 2017.

[10] B.B. Venegas, and J.A. Ventura, “A Two-Stage Supply Chain Coordination Mechanism considering Price Sensitive Demand and Quantity Discounts”, European Journal of Operational Research., vol. 264, pp. 524-533, 2018.

[11] H. Wang, Y. Yu, W. Zhang, and Z.H. Hua, "Procurement Strategies for Lost-Sales Inventory Systems with All-Units Discounts", European Journal of Operational Research., vol. 272, pp. 539-548, 2019.

[12] H.M. Wee, "Deteriorating inventory model with quantity discount, pricing and partial backordering", international journal Production Economics., and vol. 59, pp. 511-518, 1999.

[13] S. Banerjee, and S. Agrawal, "Inventory Model for Deteriorating Items with Freshness and Price Dependent Demand: Optimal Discounting and Ordering Policies", Applied Mathematical Modelling, vol. 52, pp. 53-64, 2017.

[14] J. Xu, Q. Qi, and Q. Bai, "Coordinating a dual-channel supply chain with price discount contracts under carbon emission capacity regulation", Applied Mathematical Modelling., vol. 56, pp. 449–468, 2018.

[15] A. Mohammdi, and A., Rajabi, "Application of Markov Chain Model to Provide the Appropriate Model of Tax Discount with Dynamic Programming Approach", Management Research in Iran, vol. 16, no. 1, pp. 107-129, 2012. (In Persian).

[16] S.H. Tamjidzad, and S.H. Mirmohammadi, "An optimal (r,Q) policy in a stochastic inventory system with all-units quantity discount and limited sharable resource", European Journal of Operational Research., vol. 247, pp. 93–100, 2015.

[17] R. Mohammadi-vojdan, and J. Geunes, "The newsvendor problem with capacitated suppliers and quantity discounts", European Journal of Operational Research., vol. 271, pp. 1–11, 2018.

[18] S.P. Chen, and Y.H. Ho, "Optimal inventory policy for the fuzzy newsboy problem with quantity discounts", Information Sciences., vol. 228, pp. 75–89, 2013.

[19] J.Sadeghi, S,M. Mousavi, and S.T. Akhavan Niaki, "Optimizing an Inventory Model with Fuzzy Demand, Backordering, and Discount Using a Hybrid Imperialist Competitive Algorithm", Applied Mathematical Modelling., vol. 40, pp. 7318-7335, 2016.

[20] A. Kundu, P. Guchhait, P. Pramanik, M.K. Maiti, and M.A. Maiti, “production inventory model with price discounted fuzzy demand using an interval compared hybrid algorithm”, Swarm and Evolutionary Computation., vol. 34, pp. 1-17, 2017.

[21] J. Behnamian, and M.M. Bashar, “Multi-stage modeling for non-cooperative multi-echelon supply chain management problem with discount under uncertainty”, Modern Research in Decision Making., vol. 2, no. 3, pp. 50-75, 2017.(In Persian)

[22] S.H. Tamjidzad, and S.H. Mirmohammadi, Optimal (r, Q) policy in a stochastic inventory system with limited resource under incremental quantity discount, Computers & Industrial Engineering., vol. 103, pp. 59-69, 2017.

[23] S.H. Tamjidzad, and S.H. Mirmohammadi, “A two-stage heuristic approach for a multi-item inventory system with limited budgetary resource and all-units discount”, Computers & Industrial Engineering., vol. 124, pp. 293-303, 2018.

[24] C.V. Delft, and J.P. Vial, Discounted costs, “obsolescence and planned stock outs with the EOQ formula”. International Journal of Production Economics, vol. 44, pp. 255-265, 1996.

[25] P. Joglekar, P. Lee, A profit-maximization model for a retailer's stocking decisions on products subject to sudden obsolescence. Production and Operations Management vol. 5, no. 3, pp. 288-294, 1996.