پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره ۵، شماره ٤، زمستان ۱۳۹۹، صص ۸۵-۹۹
نوع مقاله: پژوهشی

تعیین نقطه تعادل در بازی‌های نرمال مارکفی گسسته دونفره

رامین صادقیان*

دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۳

چکیده

ترکیبی از دو یا چند استراتژی که در ابتدا مدنظر یک بازیکن نبوده است، می‌تواند در مراحل بعدی مدنظر آن بازیکن قرار گیرد. در این مقاله نوعی از بازی‌ها با نام بازی‌های مارکفی[1] معرفی می‌گردند که چنانچه استراتژی‌های هر بازیکن را به عنوان یک حالت در نظر بگیرید که در مرحله بعدی با توجه به شرایط و موقعیت، همان بازیکن ممکن است همان استراتژی یا استراتژی دیگری را با احتمالی مشخص انتخاب نماید که این انتخاب می‌تواند بستگی به استراتژی بازیکنان رقیب داشته باشد. در این تحقیق یک بازی نرمال دونفره گسسته با رویکرد زنجیره مارکف درنظر گرفته می‌شود که احتمالات انتقال از قبل مشخص شده و مستقل بوده و فقط تحت تأثیر استراتژی‌های قبلی بازیکن رقیب می‌باشد. در این مقاله نحوه تعیین نقاط تعادل تحت این شرایط مورد ارزیابی و تحلیل قرار می‌گیرد. یک مثال عددی نیز جهت تشریح بیشتر فرآیند ارائه می‌گردد.

کلمات کلیدی : بازی نرمال مارکفی، بازی چندمرحله‌ای، زنجیره مارکف، ماتریس احتمالات انتقال

---

* نویسندهٔ مسؤول مقاله
E-mail: sadeghian@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

رویکرد تئوری بازی از زمان ارائه اولین نظریه‌ها تاکنون در زمینه‌های مختلف پیشرفت و تغییرات قابل‌توجهی کرده است و دسته‌بندی‌های مختلفی نیز برایشان پیشنهادشده است. بازی‌ها دارای دسته‌بندی‌های مختلفی هستند [۱]. از آن جمله بازی‌ها را بر حسب تعداد بازیکنان، گسسته یا پیوسته بودنشان، زمان ارائه تصمیم‌گیری اعم از فرم‌های نرمال، پویا و ائتلاف، با همکاری یا بدون همکاری بودن بازی‌ها، قطعی یا غیرقطعی بودن استراتژی‌ها و انتخاب‌ها، یک مرحله‌ای یا چندمرحله‌ای بودن و ... دسته‌بندی می‌کنند [۱-۲]. برخی از این دسته‌بندی‌ها کمتر موردتوجه قرار گرفته‌اند. به عنوان نمونه بازی‌های مخلوط[۲] و بازی‌های چندمرحله‌ای[۳] علیرغم اینکه در واقعیت بیشتر رخ می‌دهند، در مقالات و مباحث علمی کمتر موردتوجه قرار گرفته‌اند [۳]. در این میان نوع خاصی از بازی‌ها می‌تواند موردتوجه و تعریف قرار گیرد که در این مقاله به آن‌ها بازی‌های مارکفی گفته می‌شود. بازی‌های مارکفی قبلاً در مقالاتی نیز موردتوجه قرار گرفته‌اند [٤-۵] ولی اینکه بتوان نقاط تعادل را با استفاده از زنجیره مارکف مورد تحلیل قرار داد، تاکنون به‌ندرت موردتوجه قرار گرفته یا به صورت الگوریتمی ارائه نشده است. در نظر گرفتن بازی‌ها با رویکرد مارکفی دارای چندین مزیت است که در بازی‌های معمولی مدنظر قرار نمی‌گیرد؛ از آن جمله می‌توان به چندمرحله‌ای بودن بازی‌ها اشاره کرد که بازی‌ها تا زمانی که بازیکنان به تعادل پایدار نرسند، ادامه می‌یابد که در بازی‌های سنتی یا فقط یک‌بار بازی انجام می‌شود یا در صورت تکرار در چند مرحله قبل از رسیدن به نقطه تعادل پایدار متوقف می‌شود. مزیت دیگر این بازی‌ها این است که استراتژی‌های قابل انتخاب برای بازیکنان صرفاً قطعی نبوده و بازیکنان می‌توانند ترکیبی از استراتژی‌ها را مدنظر قرار دهند. مزیت سوم این دسته از بازی‌ها این است که بازی‌ها لزوماً قطعی نیستند و می‌توانند به صورت عدم قطعیت نیز اعمال شوند. این عدم قطعیت هم در نوع ترکیب استراتژی‌ها و هم در احتمال رویداد آن‌ها قابل‌اعمال است. مزیت دیگری هم که برای این دسته از بازی‌ها می‌توان اشاره کرد، این است که در صورت تمایل می‌توان بر نوع عوامل اثرگذار بر احتمالات انتقال از جمله عوامل مرتبط با هر بازیکن یا بازیکنان رقیب و حتی اثرات مرتبط با گذر زمان دخل و تصرف کرده و آن‌ها را نیز موردتوجه قرار داد. با توجه به مباحث

فوق، هدف اصلی این مقاله، معرفی بازی‌های مارکفی با شرایط و مزایای مذکور و نیز نحوه تعیین و تحلیل نقاط تعادل این‌گونه بازی‌ها می‌باشد. برای این منظور در این مقاله، بازی‌های نرمال مدنظر قرار می‌گیرند و نحوه تعیین نقاط تعادل برای آن‌ها بررسی می‌شود. یکی از مفروضات این تحقیق این است که بازی‌ها دونفره گسسته بوده و احتمالات انتقال فقط تحت تأثیر استراتژی‌های انتخاب شده توسط رقیب می‌باشند.

۲- تعاریف

۲-۱- بازی‌های چندمرحله‌ای[٤]

مدل بازی استراتژی به صورت ساختار تصمیم‌گیری متوالی است. وقتی مدل در حالتی استفاده می‌شود که تصمیم‌گیرندگان به‌طور متوالی حرکت انجام می‌دهند، فرض می‌شود هر تصمیم‌گیرنده طرح اقدام خود را یک‌بار برای همیشه انتخاب می‌کند و این طرح با وقوع رویدادها نمی‌تواند تغییر کند. در مقابل در بازی‌های تعمیم‌یافته[٥] ساختار توالی تصمیم‌گیری‌ها روشن و مشخص است و اجازه می‌دهد تا در موقعیت‌های مختلف با وقوع رویدادها تصمیم‌گیرنده تصمیم خود را تغییر دهد [٦].

در بازی‌های تعمیم‌یافته با اطلاعات کامل[٦] نیاز است تا مجموعه بازیکنان و ترجیحاتشان مشخص شود و در بازی‌های استراتژیک علاوه بر این موارد، ترتیب حرکت بازیکنان و اقدام‌هایشان نیز باید مشخص باشد که با مشخص کردن مجموعه‌ای از تمام توالی‌های اقدامات انجام می‌گیرد [٦].

در بسیاری از تعاملات استراتژیک، تعاملات با همان یک نفر تکرار می‌شود که چنین حالتی فرصتی را جهت کسب مزیتی بر دیگر بازیکنان فراهم می‌آورد. نتیجه یک بازی تکراری دنباله‌ای از نتایج یک بازی استراتژیک است [٦].

مجموعه‌ای از بازی‌ها وجود دارند که به بازی‌های تکراری[٧] معروف‌اند. در بازی‌های تکراری به بازی پایه یک بازی جزء یا بازی مرحله‌ای گویند که در چندین مرحله بازی می‌شود. اگر بازی جزء بی‌نهایت بار بازی شود به آن ابربازی گفته می‌شود. در مقابل اگر ساختار بازی با تغییر زمان تغییر کند به آن بازی تفاضلی (دیفرانسیلی)[٨] گویند. در حقیقت در بازی‌های

تکراری ساختار مستقل از زمان است درحالی‌که در بازی‌های دیفرانسیلی ساختار وابسته به زمان است، ولی درهرحال این به آن معنی نیست که استراتژیک بازی‌های تکراری مستقل از زمان هستند. یعنی یک بازی می‌تواند تا بی‌نهایت تکرار شود اما استراتژی‌ها وابسته به اقدامات گذشته باشند. معمولاً تحلیل ابربازیها[۹] ساده‌تر از بازی‌های دیفرانسیلی است؛ زیرا بازی‌های دیفرانسیلی باید با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تحلیل و بررسی شوند [۷].

اگر دنباله مشخصی برای مسئله وجود نداشته باشد، آن بازی باید به صورت حرکت هم‌زمان درنظر گرفته شود. در غیر این صورت، به صورت حرکات دنباله‌ای انجام می‌شود. در اکثر بازی‌ها دنباله حرکات روی استراتژی‌ها در یک بازی اثر می‌گذارند و در نتیجه نقطه تعادل تحت تأثیر قرار می‌گیرد و اغلب بازیکنی که حرکت اول را انجام می‌دهد، دارای مزیت بیشتری است [۷].

۲-۲- بازی‌های نرمال (ایستا) و پویا[۱۰]

بین بازی‌های ایستا و پویا تفاوت‌هایی وجود دارد. بازی‌های ایستا به بازی‌های تک‌مرحله‌ای[۱۱] نیز معروف‌اند. بازی‌های پویا به دو دسته بازی‌های متناهی و نامتناهی[۱۲] دسته‌بندی می‌شوند. در بازی‌های متناهی بازی در یک زمان (یک زمان محدود) انجام می‌شود و پایان بازی با قطعیت مشخص است. در مقابل در بازی‌های نامتناهی بازی یا تا ابد ادامه دارد یا پایان بازی با قطعیت مشخص نیست.

پیچیدگی بازی‌های پویا بیشتر از بازی‌های ایستا است که این موضوع با یادآوری تعریف یک استراتژی مشخص می‌شود. هرچه افق زمانی طولانی‌تر باشد، ممکن است شرایط اضطراری بیشتری در طول بازی ایجاد شود [۷].

۲-۳- بازی‌های مارکفی[۱۳]

اگر یک بازی چندین مرحله تکرار شود، هر بازیکن می‌تواند در هر مرحله یک استراتژی را با احتمال مشخصی انتخاب نماید که معمولاً این انتخاب به انتخاب قبلی بازیکن رقیب وابستگی بیشتری خواهد داشت. این نوع بازی‌ها را که هر استراتژی می‌تواند در نقش یک حالت بوده و

احتمال انتخاب هر استراتژی نیز احتمال حالت‌ها محسوب شود، یک بازی از نوع مارکفی نامیده می‌شود [۳] و [۸-۱۳].

فارغ از نوع بازی‌ها که می‌توانند دونفره[۱٤] یا چند نفره[۱۵] [۱٤-۲۰]، گسسته یا پیوسته [۲٤-۲۱]، یک مرحله‌ای یا چندمرحله‌ای [۳] و [۲۵] باشند، این بازی‌ها را می‌توان به صورت مارکفی نیز در نظر گرفت [٤-۵] و [۲٦-۲۸]. در این نوع بازی‌ها هر بازیکن یک استراتژی را با احتمال مشخصی انتخاب می‌کند و بر حسب اینکه رقیب چه استراتژی را برگزیند، می‌تواند در انتخاب‌های بعدی استراتژی خود را تغییر دهد و به صورت پویا و بر حسب شرایط تصمیم‌گیری نماید. در شرایط واقعی اکثر بازی‌ها به همین نحو انجام می‌شوند و بازیکنان معمولاً خود و انتخاب‌های خود را طبق شرایط وفق و تغییر می‌دهند. از دید بازیکنان استراتژی‌ها دارای احتمالات مشخصی هستند، حتی اگر نتوانند آن را به‌طور شفاف مشخص نمایند. به عنوان نمونه در یک بازی شطرنج حرکات هر بازیکن می‌تواند بر اساس حرکات رقیب تغییر نماید و برعکس هر حرکت یک بازیکن، حرکات بعدی رقیب را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. انتخاب هر استراتژی از جانب بازیکنان به حرکت قبلی خود و رقیب بستگی دارد و با احتمال مشخصی قابل انتخاب است.

۳- ارائه مدل پیشنهادی

نوع بازی در بازی‌های مارکفی بر روی نحوه عملکرد انتخاب‌ها اثرگذار خواهد بود. در این مقاله سه سناریو برای این منظور درنظر گرفته می‌شود. نحوه عملکرد هر یک از این بازی‌های مارکفی و در نهایت تعیین نقطه تعادل برای این بازی‌ها در هر یک از این سناریوها، هدف این مقاله خواهد بود. در این صورت چنانچه یک بازی از نوع مارکفی باشد، می‌توان با استفاده از مدل‌ها و سناریوهای پیشنهادی، نقاط تعادل بازی را تعیین نمود. باید توجه داشت یکی از مفروضات مهم در این مقاله این است که احتمال انتقال صرفاً تحت تأثیر استراتژی‌های رقیب است؛ به این معنا که اگر بازیکن A استراتژی A_1 را انتخاب کرده باشد، بازیکن B با احتمال r_{11} استراتژی B_1 را انتخاب می‌کند که این احتمال صرفاً تحت تأثیر انتخاب استراتژی‌های A_1, B_1 است یا به زبان ساده‌تر تابعی از A_1, B_1 است. مدل پیشنهادی دارای مفروضاتی است که

برخی از آن‌ها عبارت‌اند از:

- بازی به صورت پویا مدنظر قرار می‌گیرد.
- بازی دونفره و گسسته است.
- احتمالات انتقال صرفاً تحت تأثیر استراتژی‌های رقیب بوده و در واقع مقادیر تابع مطلوبیت نیز روی مقادیرشان اثرگذار است.
- استراتژی تمام بازیکنان در تمام مراحل ثابت است.
- احتمالات انتقال در تمام مراحل ثابت است.

اگر یک بازی پویا به یک زنجیره مارکف تبدیل شود که در ادامه این مقاله توضیح داده می‌شود، جهت تعیین احتمالات پایدار یا نهایی [۲۹-۳۰] که در حقیقت احتمالات در بی‌نهایت است، می‌بایست از یک ماتریس احتمال انتقال که به صورت ماتریس مربعی به نام T است و دستگاه معادلات ذیل استفاده گردد:

$$\begin{cases} qT = q \\ \sum_i q_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qT - q.I = O \\ \sum_i q_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q.(T - I) = O \\ \sum_i q_i = 1 \end{cases} \quad (۱)$$

در دستگاه معادلات فوق ماتریس T یک ماتریس مربعی m×m است و q یک ماتریس برداری 1×m است و در حقیقت ماتریس q حالت حدی ماتریس Q است که در بینهایت به یک حالت یا مرز جذب‌شده و مقدار حدی آن از رابطه (۱) تعیین می‌شود و در بین‌هایت به یک مقدار ثابت میل خواهد کرد:

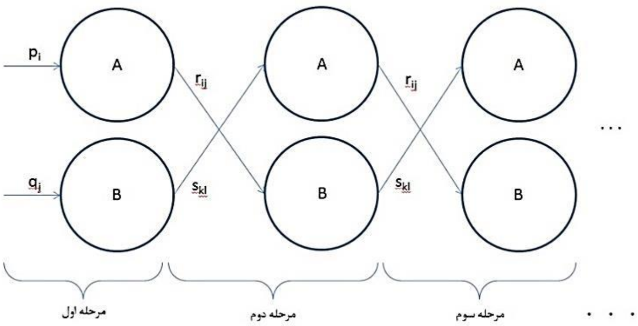
$$Q = \lim_{n\to\infty} T^n \quad (۲)$$

همچنین باید توجه نمود که معادله اول از دستگاه معادله موجود در رابطه (۱) یعنی $q.(T - I) = O$ در حقیقت دارای m معادله است ولی چون این معادلات همگن هستند m-1 معادله آن‌ها می‌تواند جهت حل دستگاه انتخاب و استفاده شود و همراه با معادله $\sum_i q_i = 1$ تشکیل یک دستگاه کامل معادلات جهت حل و تعیین مقادیر q را بدهد [۲۹-۳۰].

۱-۳- بازی‌های نرمال دونفره

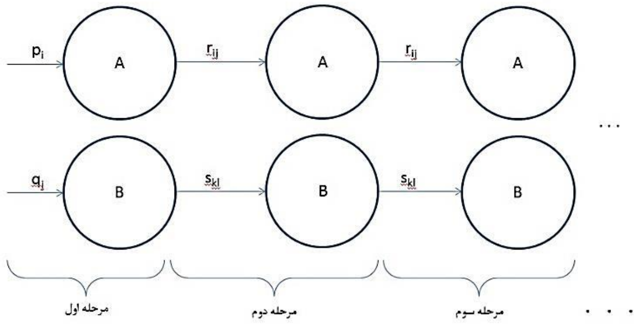
اگر یک بازی گسسته دونفره به صورت ماتریس رابطه (۳) موجود باشد که $A_1, A_2, \ldots, A_m$ استراتژی‌های بازیکن A و $B_1, B_2, \ldots, B_m$ استراتژی‌های بازیکن B هستند و (f_{ij}^A, f_{ij}^B) مطلوبیت بازیکنان $A,\ B$ به ازای استراتژی‌های i,j است و بازی به صورت نرمال بین دو بازی‌کننده A, B به صورت تکراری در چندین مرحله تا رسیدن به نقطه تعادل پایدار برگزار شود. در مرحله اول بازی، بازیکن A با احتمالات p_i یکی از استراتژی‌های $A_1, \ldots, A_m$ را انتخاب می‌کند و بازیکن B نیز با احتمالات q_i یکی از استراتژی‌های $B_1, \ldots, B_n$ را انتخاب می‌کند. سپس در مرحله دوم، هر دو بازیکن بر اساس استراتژی انتخاب شده توسط بازیکن رقیب در مرحله قبلی، با یک احتمال مشخص که تابع مطلوبیت بازی نیز رویان اثرگذار خواهد بود، استراتژی موردنظر خود را انتخاب می‌کند. به‌عنوان‌مثال بازیکن B با احتمال r_{ij} استراتژی B_j را انتخاب می‌کند؛ مشروط بر آنکه بازیکن A استراتژی A_i را در مرحله قبلی انتخاب کرده باشد. از مرحله سوم به بعد مراحل دوم به بعد تکرار خواهند شد. به این معنی که احتمالات در مراحل دوم و سوم و چهارم و ... با هم برابرند. شکل (۱) نمای کلی زنجیره مارکف حاصل از بازی مارکفی فوق‌الذکر را نشان می‌دهد که با توجه به درنظر گرفتن حالات پنهان و اثرگذار ترسیم‌شده است.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ (f_{11}^A, f_{11}^B) & (f_{12}^A, f_{12}^B) & \cdots & (f_{1n}^A, f_{1n}^B) \\ (f_{21}^A, f_{21}^B) & (f_{22}^A, f_{22}^B) & \cdots & (f_{2n}^A, f_{2n}^B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_{m1}^A, f_{m1}^B) & (f_{m2}^A, f_{m2}^B) & \cdots & (f_{mn}^A, f_{mn}^B) \end{bmatrix} \quad (۳)$$



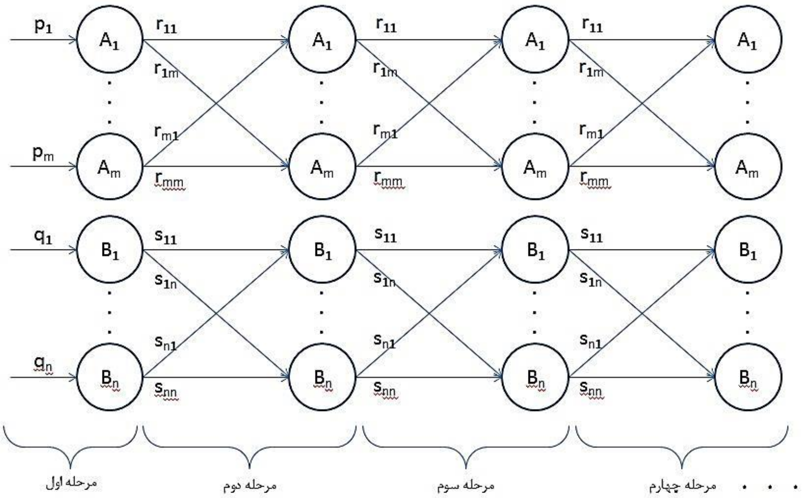
شکل ۱: نمای کلی زنجیره مارکف پنهان حاصل از بازی مارکفی نرمال

همان‌گونه که در شکل (۱) مشخص است، بازیکن A در واقع استراتژی خود را با توجه استراتژی مرحله قبل بازیکن B تعیین می‌کند و بازیکن B نیز به همین صورت عمل می‌نماید. ولی چون هر دو بازیکن مستقل و هم‌زمان تصمیم‌گیری می‌نمایند، در حقیقت شکل فوق نمای زنجیره مارکف پنهان را نشان می‌دهد که به صورت شکل زیر قابل ساده‌سازی است. یعنی در بازی‌های نرمال ما دو زنجیره مارکف مستقل و مشابه با هم داریم که به ازای هر دو بازیکن قابل ترسیم است ولی احتمالات انتقال تحت تأثیر حالات و استراتژی‌های رقیب و توابع مطلوبیت موجود تعیین می‌شود.



شکل ۲: نمای کلی زنجیره مارکف حاصل از بازی مارکفی نرمال که معادل شکل (۱) است

همچنین شکل زیر، زنجیره مارکف حاصل از بازی مارکفی را با جزئیات احتمالات موجود نمایش می‌دهد.



شکل ۳: زنجیره مارکف حاصل از بازی مارکفی نرمال همراه با جزئیات

ماتریس‌های احتمال انتقال حاصل از بازی مارکفی به صورت ذیل خواهند بود:

$$P_{1\times m}=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_m\end{bmatrix}$$

$$Q_{1\times n}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{bmatrix}$$

$$R_{m\times m}=\begin{array}{c}\\ A_1\\ \vdots\\ A_m\end{array}\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm}\end{bmatrix}$$

$$S_{n\times n}=\begin{array}{c}\\ B_1\\ \vdots\\ B_n\end{array}\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_n\\ s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn}\end{bmatrix} \quad (٤)$$

با توجه به استقلال زنجیره‌های مارکف، برای محاسبه احتمالات حدی هر دو بازیکن یک روش صورت ذیل پیشنهاد می‌گردد.

احتمالان حدی به صورت رابطه ذیل تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} \Pi_A = P_{1\times m} \otimes R_{m\times m} \times R_{m\times m} \times R_{m\times m} \times \cdots \\ \Pi_B = Q_{1\times m} \otimes S_{n\times n} \times S_{n\times n} \times S_{n\times n} \times \cdots \end{cases} \quad (٥)$$

برای این منظور ابتدا با درنظر گرفتن T=R یا T=S و با استفاده از دستگاه معادلات (۱) مقدار q محاسبه شده و مقدار احتمالات حدی برای بازیکنان A, B به‌طور جداگانه تعیین می‌شود. با تعیین احتمالات حدی برای بازیکنان، این بازیکنان آن استراتژی را انتخاب خواهند کرد که بیشترین مقدار را در احتمالات حدی کسب کرده باشد.

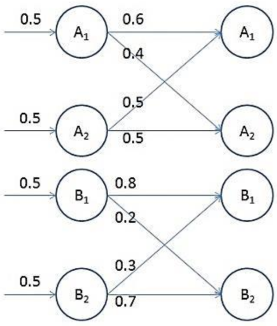
۴- ارائه مثال عددی

فرض کنید یک ماتریس بازی دونفره گسسته به صورت رابطه (٦) و نیز زنجیره مارکف با احتمالات انتقال به صورت شکل (٤) موجود است.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ (2,0) & (3,2) \\ (3,4) & (2,2) \end{bmatrix} \quad (٦)$$

اگر بازی (٦) به صورت نرمال برگزار گردد و زنجیره مارکف مربوطه به صورت شکل زیر باشد، طبق روش نشان‌گذاری، نقاط $(A_1, B_2), (A_2, B_1)$ نقاط تعادل محسوب می‌شوند.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ (2,0) & (3^+,2^*) \\ (3^+,4^*) & (2,2) \end{bmatrix} \quad (٧)$$



شکل ۴: زنجیره مارکف مربوط به بازی نرمال مثال عددی

چنانچه از روابط (۱) و (۲) و (٤) و (٥) در تعیین احتمالات حدی استفاده شود، داریم:

$$R=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}q\times(R-I)=O\\ \sum_i q_i=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-0.4q_1+0.5q_2=0\\ q_1+q_2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}q_1=0.714\\ q_2=0.286\end{cases}$$
$$S=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}q\times(S-I)=O\\ \sum_i q_i=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-0.2q_1+0.3q_2=0\\ q_1+q_2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}q_1=0.833\\ q_2=0.167\end{cases} \qquad (۸)$$

$$\Rightarrow \Pi=\begin{bmatrix}0.714 & 0.286 & 0.833 & 0.167\end{bmatrix}$$

با توجه به احتمالات حدی تعیین‌شده، نقطه (A_1, B_1) نقطه تعادل بازی نرمال محسوب می‌شود که با نقاط تعادل در حالت تک‌مرحله‌ای متفاوت است و دلیل این تفاوت نیز این است که در حالت تک‌مرحله‌ای نقطه تعادل صرفاً از روی ماتریس بازی تعیین شد، نه به صورت حدی. البته چون بازی به صورت حدی مطرح است، نقطه تعیین‌شده توسط این روش می‌تواند بیشتر قابل‌اتکا باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تفاوت بین بازی‌های تک‌مرحله‌ای و چندمرحله‌ای در تعیین نقاط تعادل نشان داده شد. اگر یک بازی به صورت چندمرحله‌ای انجام شود، می‌توان با استفاده از احتمالات انتقال و درنظر گرفتن استراتژی‌های بازی به عنوان حالت در هر مرحله، یک بازی گسسته را به صورت

یک زنجیره مارکف طراحی نمود و از تعیین احتمالات حدی زنجیره تعیین‌شده، نقاط تعادل حدی را به دست آورد. برای این منظور بازی‌های نرمال مدنظر قرار گرفت. یکی از مهم‌ترین مزایای استفاده از زنجیره مارکف در تعیین نقطه تعادل حدی، یافتن این نقطه در کمترین زمان و با کمترین محاسبات موجود است. البته یکی از معایب این روش نیز این است که احتمالات انتقال، می‌بایست قادر باشند علاوه بر اینکه از انتخاب استراتژی در هر مرحله توسط رقیب اثر می‌پذیرند، از توابع مطلوبیت هر بازی نیز اثرپذیری داشته باشند تا بتوانند بهترین نتیجه را در تعیین نقاط تعادل حدی ارائه دهند تا چنانچه احتمالات انتقال به صورت تابعی از مقادیر گفته‌شده درنظر گرفته شود، این مشکل قابل‌رفع است. استفاده از زنجیره مارکف به صورتی که در این مقاله ارائه شده است، می‌تواند دریچه نوینی را در مباحث تئوری بازی و ارتباط آن با فرآیندهای احتمالی باز نماید. برای تحقیقاتی آتی نیز استفاده از انواع بازی‌ها مانند بازی‌های پویا، حالت چندنفره و درنظر گرفتن احتمالات انتقالات در حالتی که بازیکنان مستقل یا غیرمستقل از هم تصمیم می‌گیرند می‌تواند پیشنهاد شود.

۵- پی‌نوشت‌ها

1. Markovian Games
2. Mixed Strategies Games
3. Multi Stage
4. Repeated Games
5. Extensive Games
6. Perfect Information
7. Repeated Games
8. Differential Games
9. Super-Games
10. Static and Dynamic Games
11. One-Shot Games
12. Finite and Infinite Games
13. Markovian Games
14. Two Player Games
15. Multi-Player Games

۶- منابع

[1] Asgharpour Mohammad Javad, (2003), Group Decision Making and Game Thory: an Approach on Operations Research, Samt Press, Tehran University, Tehran, Iran, (In Persian).

[2] Krawczyk Jacek B. and Petkov Vladimir, Multistage Games, Handbook of Dynamic Game Theory, Springer International Publishing AG, 2016.

[3] Myerson B. Roger, Multistage Games with Communication, Econometrica, March 1986, Vol. 54, No. 2, pp. 323-358.

[4] Littman L. Michael, Value-function reinforcement learning in Markov games, 2001, Journal of Cognitive Systems Research, Vol. 2, 2001, pp. 55–66.

[5] Vrancx Peter, Decentralised Reinforcement Learning in Markov Games, 2010, Dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Sciences, Brussel University, Brussels, Belgium.

[6] Osborne J. Martin, An introduction to Game Theory, 2000, Oxford University Press, Oxford, UK.

[7] Finus Michael, Game theory and international environmental cooperation, 2001, Edward Elgar Press, Massachusetts, USA.

[8] Bauso Dario and Cannon Mark, Consensus in opinion dynamics as a repeated game, Automatica, Vol. 90, April 2018, pp. 204-211.

[9] Cason N. Timothy and Mui Vai-Lam, Individual versus group choices of repeated game strategies: A strategy method approach, Games and Economic Behavior, Vol. 114, March 2019, pp. 128-145.

[10] Ashkenazi-Golan Galit and Lehrer Ehud, Blackwell's comparison of experiments and discounted repeated games, Games and Economic Behavior, Vol. 117, September 2019, pp. 163-194.

[11] Motalleb Mahdi, Annaswamy Anuradha and Ghorbani Reza, A real-time demand response market through a repeated incomplete-information game, Energy, Vol. 143, January 2018, pp. 424-438.

[12] Cason N. Timothy, Lau Paul Sau-Him and Mui Vai-Lam, Learning, teaching, and turn taking in the repeated assignment game, Economic Theory, October 2013, Vol. 54, No. 2, pp. 335–357.

[13] Shekary Maryam and Albadavi Amir, Calculating Customer Lifetime Value Considering Dynamic Behavior of Them Using Markov Chain Approach (Case study: Isaco), Management Researches in Iran, 2019, Vol. 22, No. 4, pp. 1-21, (In

Persian).

[14] Singh Vikram Vikas, Lisser Abdel, Continuous Optimization: A second-order cone programming formulation for two player zero-sum games with chance constraints, European Journal of Operational Research, Vol. 275, No. 3, 16 June 2019, pp. 839-845.

[15] Ianovski Luke Ong Egor, The complexity of decision problems about equilibria in two-player Boolean games, Artificial Intelligence, Vol. 261, August 2018, pp. 1-15.

[16] Caruso Francesco, Ceparano Carmela Maria and Morgan Jacqueline, Uniqueness of Nash equilibrium in continuous two-player weighted potential games, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 459, No. 2, 15 March 2018, pp. 1208-1221.

[17] Baskov V. O., Equilibrium payoffs in repeated two-player zero-sum games of finite automata, International Journal of Game Theory, June 2019, Vol. 48, No. 2, pp. 423–431.

[18] Lv Yongfeng, Ren Xuemei and Na Jing, Online optimal solutions for *multi-player* nonzero-sum game with completely unknown dynamics, Neurocomputing, Vol. 283, March 2018, pp. 87-97.

[19] Amoozad mahdiraji Hanan, Jaafarnejad Ahmad, Moddares Yazdi Mohammad and Mohaghar Ali, Cooperation Modeling for Unlimited Three Echelon Supply Chain: Game Theory Approach, Management Researches in Iran, 2014, Vol. 18, No. 1, pp. 171-191, (In Persian).

[20] Dori Mohsen, Jafari Eskandari Meisam, and Chaharsoghi Kamal, Choosing coordinated ordering policy in the two-level supply chain: A game theory approach, New researches in decision making, 2019, Vol. 4, No. 3, pp.47-73, (In Persian).

[21] Guo Ivan and Rutkowski Marek, Arbitrage-free pricing of multi-person game claims in iscrete time, Finance and Stochastics, January 2017, Vol. 21, No. 1, pp. 111–155.

[22] Abraham P. Mathew and Kulkarni A. Ankur, An Approach Based on Generalized Nash Games and Shared Constraints for Discrete Time Dynamic Games, Dynamic Games and Applications, December 2018, Vol. 8, No. 4, pp. 641–670.

[23] Guo Xin and Zhang Yi, Zero-sum continuous-time Markov pure jump game over a fixed duration, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 452, No. 2, August 2017, pp. 1194-1208.

[24] Sorouri Ghare-Aghaj Saman, Sadeghian Ramin, Tavakkoli-Moghaddam Reza

and Makui Ahmad, Introducing a framework for analyzing the cooperation of airlines by the game theory approach, New researches in decision making, 2019, Vol. 4, No. 1, pp. 78-99, (In Persian).

[25] Albarran E. Silvia and Clempner B. Julio, A Stackelberg security *Markov game* based on partial information for strategic decision making against unexpected attacks, Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 81, May 2019, pp. 408-419.

[26] Lei Cheng, Zhang Hong-Qi, Wan Li-Ming, Liu Lu and Ma Duo-he, Incomplete information *Markov game* theoretic approach to strategy generation for moving target defense, Computer Communications, Vol. 116, January 2018, pp. 184-199.

[27] Kloosterman Andrew, Public information in *Markov* games, Journal of Economic Theory, Vol. 157, May 2015, pp. 28-48.

[28] Chang Yanling, Erera L. Alan and WhiteIII C. Chelsea, A leader–follower partially observed, multiobjective Markov game, Annals of Operations Research, December 2015, Vol. 235, No. 1, pp. 103–128.

[29] Mollering Karin, Inventory Rationing: A New Modeling Approach Using Markov Chain Theory, 2019, Springer Press, Koln, Germany.

[30] Gilks W. R., Richardson S. and Spiegelhalter D.J., Markov Chain Monte Carlo in Practice, 1996, Chapman & Hall Press, London, UK.