

## اندازه‌گیری بدترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری: تلفیق خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌های غیرقابل کنترل در DEA نادقیق

حسین عزیزی<sup>۱\*</sup>، علیرضا امیرتیموری<sup>۲</sup>، سهراب کردرستمی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

۲- استاد، گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

۳- استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۱۸

دریافت: ۱۳۹۵/۷/۲۵

### چکیده

در ارزیابی عینی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs)، دو مشکل وجود دارد. مشکل اول نحوه کار با خروجی‌های نامطلوب است که در کنار خروجی‌های مطلوب تشکیل می‌شوند و مشکل دوم نحوه کار با متغیرهای غیرقابل کنترل است که غالباً تأثیر محیط عملیاتی را حفظ می‌کنند. با توجه به مشکلات ساخت مدل و دسترس‌پذیری داده‌ها، تعداد کمی از مقالات منتشر شده هر دو مشکل فوق را به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته‌اند. هدف از مقاله حاضر، پیشنهاد زوج جدیدی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) برای اندازه‌گیری کارایی‌های نسبی دی‌ام‌یوها در حضور عوامل غیرقابل کنترل، عوامل نامطلوب و داده‌های نادقیق است. در مقایسه با DEA سنتی، رویکرد DEA پیشنهادی، کارایی هر دی‌ام‌یو را نسبت به مرز بدترین عملکرد، که به آن مرز ورودی نیز می‌گویند، اندازه‌گیری می‌کند (بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه). مدل‌های DEA پیشنهادی، داده‌های قطعی، اطلاعات ترجیح ترتیبی، بازه‌ای، عوامل نامطلوب و عوامل غیرقابل کنترل را به‌طور هم‌زمان برای اندازه‌گیری کارایی‌های نسبی دی‌ام‌یوها در نظر می‌گیرند. یافته‌های این مقاله نه‌فقط برای روش ارزیابی عملکرد مفید است، بلکه برای محققان صنعتی و دانشگاهی نیز مفید بوده و نتایجی از منظر سیاست‌گذاری را نیز دربردارد. در این مقاله، یک مثال عددی نیز برای نشان دادن کاربرد مدل‌های DEA پیشنهادی

ارائه خواهد شد.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی‌های بدبینانه؛ اندازه‌گیری عملکرد؛ داده‌های نادقیق.

#### ۱- مقدمه

در صنایعی که به سرمایه زیاد نیاز دارند، مانند صنایع تولیدی با فناوری بالا یا بزرگ‌مقیاس، پیشرفته‌تر شدن فناوری معمولاً به معنای مقدار زیادی پول (سرمایه‌گذاری سرمایه‌ای) است. در صنایع پرخطر، از قبیل صنعت بیمه یا صنعت بانکداری، سود بالا با خطر بالا همراه است. ارزیابی خطر سرمایه‌گذاری برای مؤسسات مالی یا افراد سرمایه‌گذار در صنایع پرخطر یا نیازمند سرمایه بالا، مسئله مهمی تلقی می‌شود. در صورتی که سرمایه‌گذاری بد باشد، یک خطای نوع I بروز می‌کند و نمی‌توان آن را شناسایی کرد [۱]. خطای نوع I نشان‌دهنده خطر سرمایه‌گذاری است که باید حتماً کمینه‌سازی شود. بدیهی است که هزینه یک خطای نوع I (ضرر حاصل از یک سرمایه‌گذاری شکست‌خورده) بسیار بالاتر از یک خطای نوع II است (ضرری که مؤسسه مالی یا فرد سرمایه‌گذار در صورت انجام سرمایه‌گذاری موفق متحمل آن می‌شود)؛ بنابراین، شناسایی و اندازه‌گیری خطر سرمایه‌گذاری بسیار مهم است.

مؤسسات مالی یا سرمایه‌گذاران فردی مطمئناً باید عملکرد شرکت‌ها را در صنعت قبل از آنکه سرمایه‌گذاری کنند، ارزیابی نمایند. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به‌عنوان یک روش عالی ارزیابی عملکرد مبتنی بر داده‌ها در زمانی که مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (دی‌ام‌یوها)<sup>۱</sup> دارای ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد هستند، ارزش خود را به اثبات رسانده است. مدل اولیه DEA که مدل CCR نامیده می‌شود، در میان دی‌ام‌یوها بر اساس یک فرآیند مقایسه که در آن مقیاس نسبت مجموع وزنی خروجی‌ها به ورودی‌ها ارزیابی می‌شود، یک مرز کارا ایجاد می‌کند. دی‌ام‌یوهای به‌دست‌آمده از DEA اولیه، یک مرز کارا (بهترین عملکرد) ایجاد می‌کنند. دی‌ام‌یوهایی که روی این مرز نیستند، غیرکارای DEA محسوب می‌شوند. می‌توان تصور کرد که DEA اولیه، دی‌ام‌یوهای دارای عملکرد خوب (کارا) را در مطلوب‌ترین سناریو

---

1. DMUs

شناسایی می‌کند. بنابراین، DEA اولیه، DEA «مرز بهترین عملکرد» نامیده می‌شود. اکثر مقالات مبتنی بر DEA در دسته DEAی مرز بهترین عملکرد واقع می‌شوند. معدودی از مقالات DEA مرز بهترین عملکرد، مانند کارهای پندهارکار [۲]، پیل و پارادی [۳]، سیلین و همکاران [۴] و سوئیوشی [۵]، روی استفاده از DEA برای پیش‌بینی ناکامی یا ورشکستگی شرکت‌های بزرگ تمرکز کرده‌اند. اما مدل‌های DEA مرز بهترین عملکرد، شرکت‌هایی را که به‌طور بالقوه تحت فشار هستند، بر این اساس شناسایی می‌کند که در مطلوب‌ترین سناریو تا چه حد ناکارا هستند و برای دنیای واقعی مناسب نیستند [۶]. در شرایط آسیب‌پذیر و رقابتی کسب‌وکار، شرکت‌های بالقوه‌ای که ابتدا از کسب‌وکار خارج خواهند شد، معمولاً آن‌هایی هستند که با بدتر شدن سناریو (نامطلوب‌تر شدن)، کمترین قدرت رقابتی را دارند؛ خصوصاً زمانی که یک رکود اقتصادی یا بحران مالی بروز می‌کند (مانند بحران مالی آسیا که در سال ۱۹۹۷ اتفاق افتاد). بنابراین، برای مسئله ارزیابی خطر سرمایه‌گذاری یا پیش‌بینی ورشکستگی، روش معنی‌دارتر این است که با پیشنهاد یک فرمول‌بندی مناسب مدل، دی‌ام‌یوها را تحت بدترین سناریو ارزیابی کنیم.

DEA مرز بدترین عملکرد، شرکت‌های دچار مشکل را بر اساس اینکه در بدترین سناریو چقدر بد عمل می‌کنند، انتخاب می‌کند. این مفهوم برای مسئله ارزیابی خطر سرمایه‌گذاری مناسب است، زیرا در آنجا نیز باید بدترین شرکت‌ها را (که ممکن است شکست بخورند)، شناسایی کرد. از دیدگاه ورودی، مرز بدترین عملکرد یک پوسته محدب است که به وسیله سطح ورودی بیشینه با یک سطح خروجی معین تعریف می‌شود؛ به عبارتی، دی‌ام‌یوهایی که هزینه ورودی آن‌ها برابر با درآمد حاصل از خروجی‌ها است، مرز بدترین عملکرد را تشکیل می‌دهند. در پایین این سطح، هزینه بیشتر از درآمد خواهد بود و یک دی‌ام‌یو منطقی از کار دست خواهد کشید.

به مرزهای بدترین عملکرد توجه کمی مبذول شده است. پارادی و همکاران [۱] نشان دادند که چگونه می‌توان از تحلیل DEA بدترین عملکرد که هدف آن شناسایی شرکت‌های ناکارای DEA است، می‌توان برای طبقه‌بندی دی‌ام‌یوهای دارای عملکرد بد (که خصوصاً برای ارزیابی ریسک مفید است)، استفاده کرد. ایده استفاده از DEA بدترین عملکرد اختصاصاً برای شناسایی دی‌ام‌یوهای دارای بدترین عملکرد مسلماً برای ارزیابی اعتبار سودمند است، ولی کاربرد عمومی‌تری نیز دارد

(به‌عنوان مثال، یک پیش‌بینی ورشکستگی ارائه می‌کند). بر اساس نظریه اقتصادی اساسی<sup>۱</sup>، تولیدکنندگان ناکارا باید از بازار بیرون رانده شوند لذا دی‌ام‌یوهای ناکارا در یک سطح مقطع خاص می‌توانند نشان‌دهنده بنگاه‌هایی باشند که از کسب‌وکار بیرون می‌روند.

به‌منظور افتراق دی‌ام‌یوهای کارای DEA، جهان‌شاهلو و افضل‌نژاد [۷] پس از تعریف مرز بدترین عملکرد، یک مدل شعاعی و نیز یک مدل مبتنی بر متغیر کمکی<sup>۲</sup> برای رتبه‌بندی دی‌ام‌یوها بر اساس فاصله‌شان از این مرز ارائه کردند. در مقایسه با روش‌های قبلی برای رتبه‌بندی دی‌ام‌یوهای کارای DEA، این روش مشکلات کمتری دارد. مدل مبتنی بر متغیر کمکی آن‌ها می‌تواند دی‌ام‌یوهای غیرکارای رأسی (یا تقریباً غیرکارای رأسی) را رتبه‌بندی کند. همچنین مدل مبتنی بر متغیر کمکی آن‌ها را می‌توان در زمانی که داده‌های صفر یا منفی داریم، مستقیماً مورد استفاده قرار داد.

لی و چن [۸] برای اندازه‌گیری کارایی بدبینانه به همراه مقادیر متغیر کمکی، یک اندازه مبتنی بر متغیر کمکی کارایی در نظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از روش لایه‌سازی، کل مجموعه دی‌ام‌یوها را به چندلایه از مرزهای بدترین عملکرد تقسیم کردند. با استفاده از این روش، مدل برای بار اول اجرا می‌شود و دی‌ام‌یوهایی که اولین مرز بدترین عملکرد را تشکیل می‌دهند، قبل از آنکه مدل برای بار دوم اجرا شود، حذف می‌شوند و بعد از آن، مدل دوباره اجرا می‌شود که منجر به مجموعه جدیدی از دی‌ام‌یوهای مرزی می‌شود. سپس این‌ها قبل از آنکه مدل برای بار سوم اجرا شود، حذف می‌شوند و فرآیند تا پایان دی‌ام‌یوها تکرار می‌شود. همچنین آن‌ها برای افتراق دی‌ام‌یوهای ناکارای بدبینانه از یکدیگر و رتبه‌بندی کامل به‌جای طبقه‌بندی همه دی‌ام‌یوها در نامطلوب‌ترین موقعیت، از روش رتبه‌بندی فروکارایی<sup>۳</sup> استفاده کردند. فروکارایی نیز به‌عنوان کارایی بدتر از بدترین کارایی در نظر گرفته می‌شود.

در ارزیابی عینی عملکرد دی‌ام‌یوها، دو مشکل وجود دارد. مشکل اول نحوه کار با خروجی‌های نامطلوب است که در کنار خروجی‌های مطلوب تشکیل می‌شوند. مقالات سنتی فقط به خروجی‌های مطلوب ارزش می‌دهند و خروجی‌های نامطلوب را به‌سادگی مورد چشم‌پوشی قرار می‌دهند. ولی چشم‌پوشی از خروجی‌های نامطلوب

1. Basic economic theory

2. Slack

3. hypo-efficiency

درست مانند این است که بگوییم آن‌ها در ارزیابی نهایی هیچ ارزشی ندارند و لذا ممکن است به نتایج گمراه‌کننده‌ای منتهی شود. بنابراین، باید به دی‌ام‌یوها در مقابل تولید خروجی‌های مطلوب اعتبار داده شود و در مقابل، تولید خروجی‌های نامطلوب مجازات شوند. عوامل نامطلوب نوع خاصی هستند که در آن در سمت خروجی، تولید مقدار بیشتر آن با سطح ورودی یکسان نامطلوب است، و در سمت ورودی، مصرف مقدار کمتر آن با سطح خروجی یکسان نامطلوب است. مثالی از خروجی نامطلوب، آلودگی حاصل از یک فرآیند تولید است، یعنی هر چه آلاینده کمتر باشد، بهتر است. مثالی از ورودی نامطلوب، زباله‌ی استفاده شده برای تولید انرژی در یک کارخانه‌ی زباله‌سوزی است، که در آن هر چه زباله‌ی بیشتری سوزانده شود، مطلوب‌تر است. به تدریج که به مسایل زیست‌محیطی اهمیت بیشتری داده می‌شود، این مبحث نیز اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. مشکل دوم در مورد نحوه مواجهه با متغیرهای غیرقابل‌کنترل است که معمولاً منعکس‌کننده تأثیر محیط عملیاتی هستند. عوامل غیرقابل‌کنترل به عواملی گفته می‌شود که مقادیر آن‌ها از بیرون تثبیت شده است، و تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند آن‌ها را کم و زیاد کند. هم ورودی‌ها و هم خروجی‌ها ممکن است غیرقابل‌کنترل باشند. نمونه‌ای از یک چنین عامل ورودی، اندازه‌ی جمعیت است. در اندازه‌گیری کارآیی شعبه‌های یک بانک در شهرهای مختلف، سپرده‌ی جمع‌آوری شده بستگی به جمعیت شهر (یا شهرستان) دارد، یعنی هر چه جمعیت بیشتر باشد، معمولاً سپرده‌ی بیشتری جذب می‌شود. ولی متأسفانه اندازه‌ی جمعیت تحت کنترل مدیر شعبه یا مدیریت ارشد بانک نیست. مثالی از یک عامل خروجی که غیرقابل‌کنترل است، رشد جنگل است. معمولاً هر چه حجم چوب بیشتری از جنگل به دست آید، مطلوب‌تر است. اما رشد برونده بستگی به تابع رشد گونه‌ی خاص درخت دارد، و تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند آن را کنترل کند. آن دسته از مطالعات سنتی که مدل‌های پژوهشی را فقط با استفاده از عوامل قابل‌کنترل ایجاد کرده‌اند، به‌طور ضمنی فرض می‌کنند که تمام ناکارایی‌ها ناشی از مدیریت بد هستند. از آنجاکه تأثیر متغیرهای غیرقابل‌کنترل خارج نمی‌شود، لذا ارزیابی دی‌ام‌یوها در شرایط نامطلوب پایین ارزیابی خواهد شد. لیکن با توجه به مشکلات ساخت مدل و دسترس‌پذیری داده‌ها، مقالات کمی منتشر شده‌اند که هر دو مسئله را با هم در نظر گرفته باشند.

این مقاله تلاش می‌کند با ایجاد مدل ارزیابی عملکرد مبتنی بر DEA برای یک

فرآیند تولید که هم خروجی‌های مطلوب و هم نامطلوب ایجاد می‌کند، مشکل فوق را حل کند. برخلاف مدل‌های پارامتری، گنجاندن خروجی‌های نامطلوب و متغیرهای غیرقابل‌کنترل در DEA هنوز یک عرصه پژوهشی جدید در DEA به شمار می‌رود.

تحلیل‌های DEA عموماً مبتنی بر مجموعه‌ای از عوامل خروجی و ورودی کمی هستند اما در برخی از موقعیت‌ها، ممکن است متغیرهای کیفی نیز وجود داشته باشند؛ مثلاً برای عاملی مانند صلاحیت مدیریتی، شاید تنها بتوان دی‌ام‌یوها را از بهتر به بدتر رتبه‌بندی کرد. غالباً امکان آن وجود ندارد که چنین عاملی را به صورت یک اندازه کمی و دقیق‌تر بیان کنیم. در برخی از شرایط، این‌گونه عوامل را می‌توان «اندازه‌گیری» کرد، ولی حتی این اندازه‌گیری نیز به صورت سطحی برای راحتی مدل‌سازی اجبار می‌شود.

اولین مدل‌های DEA که مشتمل بر متغیرهای ترتیب رتبه‌ای بودند، متعلق به کوک و همکاران [۹، ۱۰] بودند. برای واردکردن این متغیرهای رتبه‌ای در ساختار DEA، مؤلفان به صورت زیر عمل کردند؛ مثلاً برای یک خروجی  $r$ ، فرض کنید دی‌ام‌یوی  $k$  را بتوان به یکی از  $L$  موقعیت رتبه اختصاص داد ( $L \leq n$ ). وقتی که  $DMU_k$  به موقعیت  $\delta$  در خروجی ترتیبی  $r$  اختصاص داده می‌شود، می‌توان تصور کرد که به آن واحد  $k$  یک مقدار یا ارزش خروجی  $y_r(\delta)$  اختصاص داده شده است. درجات نظامی مانند گروه‌بانی، استوار، ستوان، سروان، سرگرد، سرهنگ، سرتیپ و غیره، نمونه‌های مرسوم از داده‌های ترتیبی هستند. کوپر و همکاران [۱۱-۱۳] نیز درباره داده‌های بازه‌ای بحث کرده‌اند. مخلوط داده‌های بازه‌ای و ترتیبی، داده‌های نادقیق نامیده می‌شود و روش تحلیل مربوط به آن‌ها، بر اساس کوپر و همکاران [۱۱]، DEA نادقیق نام دارد. وانگ و همکاران [۱۴] مدل‌های DEA بازه‌ای خوش‌بینانه را برای مواجهه با داده‌های ورودی و/یا خروجی نادقیق بر اساس حساب بازه‌ای ارائه داده‌اند. در همه این مقالات، کارایی نسبت به مرز بهترین عملکرد اندازه‌گیری می‌شود.

قصد اصلی این مقاله فرمول‌بندی مدل‌های جدید برای تلفیق خروجی‌های نامطلوب و نیز ورودی‌های غیرقابل‌کنترل در DEA مرز بدترین عملکرد با داده‌های نادقیق است. در این مقاله از حساب بازه‌ها برای مدل‌سازی بازه کارایی

بدبینانه برای داده‌های نادقیق استفاده می‌کنیم. روش حساب بازه‌ای مدل‌سازی کران پایین و بالای بازه کارایی را بسیار ساده و واضح می‌کند. زوج مدل DEA بازه‌ای پیشنهادی، داده‌های قطعی، ترتیبی، بازه‌ای، عوامل نامطلوب و عوامل غیرقابل کنترل را به طور هم‌زمان برای اندازه‌گیری کارایی‌های بدبینانه دی‌ام‌یوها در نظر می‌گیرد. یک مثال عددی برای توضیح کاربردهای روش پیشنهادی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در قسمت ۲، مقدمه‌ای از مدل‌های مرز بدترین عملکرد ارائه می‌شود. قسمت ۳، مدل‌های DEA مرز بدترین عملکرد را بر اساس حساب بازه‌ها در حضور عوامل غیرقابل کنترل و عوامل نامطلوب ارائه می‌کند. در قسمت ۴، یک مثال توضیحی شرح داده می‌شود و نتایج مورد بحث قرار می‌گیرد و بالاخره در قسمت ۵، نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

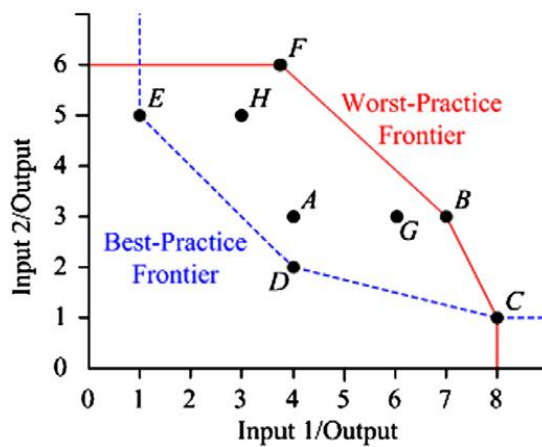
## ۲- DEA مرز بدترین عملکرد

در دنیای واقعی، شرکت‌هایی که قابلیت بیشتری برای خارج شدن از کسب‌وکار دارند، معمولاً شرکت‌هایی هستند که در شرایط نامطلوب، قدرت رقابتی کمتری دارند. مدل مرز بدترین عملکرد بر اساس این مفهوم برای شناسایی دی‌ام‌یوهای دارای عملکرد بد در سناریوی بدترین حالت فرمول‌بندی می‌شود؛ برخلاف مدل مرز بهترین عملکرد که  $DMU_0$  را در مطلوب‌ترین سناریو ارزیابی می‌کند. گرچه مدل مرز بهترین عملکرد یک مرز بهترین عملکرد را بر اساس بهترین عملکرد مشاهده‌شده ایجاد می‌کند و کارایی هر دی‌ام‌یو را نسبت به این مرز می‌سنجد، مدل مرز بدترین عملکرد، مرز بدترین عملکرد را بر اساس بدترین عملکرد مشاهده‌شده ایجاد می‌کند و نمره کارایی یک دی‌ام‌یو که روی این مرز واقع نمی‌شود، نسبت به یک ترکیب خطی از دی‌ام‌یوهای دارای بدترین کارایی ارزیابی می‌شود.

برای نشان دادن تفاوت بین مرز بهترین عملکرد و مرز بدترین عملکرد، از مثالی با داده‌های دو ورودی و یک خروجی که در جدول ۱ نشان داده شده است، استفاده می‌کنیم. همه خروجی‌ها برای سادگی به یک نرمال‌سازی شده‌اند. مرزهای بهترین عملکرد و بدترین عملکرد این مثال در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱ داده‌های مثال

DMU								نماد	شماره
H	G	F	E	D	C	B	A		
۳	۶	۴	۱	۴	۸	۷	۴	$x_1$	ورودی ۱
۵	۳	۶	۵	۲	۱	۳	۳	$x_2$	ورودی ۲
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	$y$	خروجی



شکل ۱ نمایش مرزهای بدترین عملکرد و بهترین عملکرد

در مدل CCR مرز بهترین عملکرد،  $C$ ،  $D$  و  $E$  به‌عنوان دی‌ام‌پوهای کارای خوش‌بینانه ارزیابی می‌شوند که یک مرز بهترین عملکرد (خط مقطع) را تشکیل می‌دهند و  $A$ ،  $B$ ،  $F$ ،  $G$  و  $H$  در مقایسه با دی‌ام‌پوهای کارای خوش‌بینانه، کارایی بدتری دارند. در مدل مرز بدترین عملکرد،  $B$ ،  $C$  و  $F$  به‌عنوان دی‌ام‌پوهای دارای بدترین کارایی شناسایی می‌شوند که یک مرز بدترین عملکرد (خط ممتد) را تشکیل می‌دهند و  $A$ ،  $D$ ،  $E$  و  $G$  نسبت به دی‌ام‌پوهای دارای بدترین کارایی، کارایی بهتری دارند.

$DMU_C$  هم روی مرز تولید کارا و هم روی مرز تولید ناکارا قرار دارد؛ در واقع هم کارای خوش‌بینانه و هم ناکارای بدبینانه است. به‌عبارت‌دیگر، دو مرز هم‌زمان از این دی‌ام‌پو عبور می‌کند. بروز این وضعیت زمانی محتمل است که تعداد دی‌ام‌پوهای



موردنظر کم باشد و می‌توان آن را به‌صورت زیر تفسیر کرد: گرچه دی‌ام‌یوهای کارای خوش‌بینانه عملکرد خوبی دارند، ولی برخی دی‌ام‌یوهای کارای خوش‌بینانه عملکردی بدتر از سایرین دارند. به همین ترتیب، باآنکه انتظار داریم که دی‌ام‌یوهای ناکارای بدبینانه عملکرد ضعیفی داشته باشند، اما برخی دی‌ام‌یوهای ناکارای بدبینانه بهتر از بقیه عمل می‌کنند. لذا اگر یک دی‌ام‌یو هم کارای خوش‌بینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد، معنایش این است که عملکرد آن نه بهترین است و نه بدترین؛ مانند  $DMU_C$  در این مثال.

برای اینکه ببینیم که عملکرد یک شرکت در بدترین سناریو تا چه اندازه ممکن است بد باشد، باید اندازه‌گیری را کمینه‌سازی کنیم. از آنجاکه عملکرد شرکت در سناریوی بدترین حالت ارزیابی می‌شود، می‌توان آن را «بدترین کارایی نسبی» یا «کارایی بدبینانه» دانست. در مدل‌های مرز بدترین عملکرد، دی‌ام‌یوهای روی مرز بدترین عملکرد را دی‌ام‌یوهای ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه می‌نامیم و دی‌ام‌یوهایی را که روی مرز نیستند، دی‌ام‌یوهای غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه می‌نامیم.

## ۲-۱- مدل DEA مرز بدترین عملکرد با بازده به مقیاس ثابت

تعداد  $n$  واحد را در نظر بگیرید که هرکدام از  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی استفاده می‌کنند. این‌ها را با نماد  $(X_j, Y_j)$  ( $j=1, \dots, n$ ) نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که  $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$ ،  $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \geq 0$ ، ( $j=1, \dots, n$ )  $Y_j \neq 0$  بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه هر  $DMU_o$  در نمونه نسبت به مجموعه‌ای که اصطلاحاً مجموعه‌ی امکان تولید بدترین عملکرد نامیده می‌شود، اندازه‌گیری می‌شود؛ یعنی  $\hat{T} = \{ (X, Y) \mid X \text{ می‌تواند } Y \text{ را تولید کند} \}$ ، که این مجموعه به‌طور تجربی از مشاهدات با در نظر گرفتن چند فرض ساخته می‌شود (ر.ک. پارکان و وانگ [۱۵]). خصوصاً اگر از فناوری کلاسیک بازده به مقیاس ثابت استفاده شود، آنگاه مجموعه‌ی امکان تولید بدترین عملکرد به‌صورت زیر تعریف می‌شود (ر.ک. پارکان و وانگ [۱۵]؛ لی و چن [۸]):

$$\hat{T} = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq X, \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \leq Y, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\} \quad (1)$$

سنجش کارایی هر DMU<sub>o</sub> عموماً در نتیجه مقایسه آن با یک نقطه‌ی تصویر غالب روی مرز مجموعه‌ی امکان تولید بدترین عملکرد به دست می‌آید. یک مدل DEA مرز بدترین عملکرد با ماهیت ورودی که بازده به مقیاس ثابت داشته باشد، به صورت زیر قابل بیان است [۱۶]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

با اعمال تبدیل چارنز و کوپر [۱۷]، مدل ۲ را می‌توان به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

که در اینجا زیروند<sup>۱</sup> « $O$ » نشان‌دهنده دی‌ام‌یو تحت ارزیابی است و  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) و  $u_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) متغیرهای تصمیم‌گیری هستند. در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود  $\theta_o^* = 1$  باشد، آنگاه گفته می‌شود که  $DMU_o$  ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه یا غیرناکارای DEA است. تمام دی‌ام‌یوهای ناکارای بدبینانه یک مرز بدترین عملکرد یا مرز ناکارا را تعیین می‌کنند. مدل‌های DEA مرز بدترین عملکرد ۲ و ۳ در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر دی‌ام‌یو هستند.

## ۲-۲- مدل‌سازی عوامل نامطلوب

در مطالعات گذشته نیز در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به‌عنوان ورودی‌هایی کلاسیک که باید کمیته‌سازی شوند، روش شهودی خوبی محسوب شده [۱۸]، لذا ما خروجی‌های نامطلوب را در مدل DEA مرز بدترین عملکرد برای تحلیل کارایی به‌عنوان ورودی در نظر می‌گیریم.

فرض کنید خروجی‌های متناظر با مجموعه زیروندهای  $R_D$  مطلوب هستند، و خروجی‌های متناظر با مجموعه زیروندهای  $R_{UD}$  خروجی‌های نامطلوب هستند. مایلیم که از خروجی‌های مطلوب، مقدار هر چه بیشتر تولید کنیم، ولی خروجی‌های نامطلوب را حتی‌الامکان تولید نکنیم. فرض کنید  $x \in \mathbb{R}_{m \times n}^+$  و  $Y \in \mathbb{R}_{s \times n}^+$  ماتریس‌هایی متشکل از عناصر نامنفی باشند که حاوی اندازه‌های ورودی و خروجی مشاهده‌شده دی‌ام‌یوها هستند. ماتریس  $Y$  را به دو قسمت تجزیه می‌کنیم:

$$Y = \begin{pmatrix} Y^g \\ Y^b \end{pmatrix}$$

که در اینجا یک ماتریس  $k \times n$  به نام  $Y^g$  معرف خروجی‌های مطلوب (خوب) و یک ماتریس  $(s-k) \times n$  به نام  $Y^b$  معرف خروجی‌های نامطلوب (بد) است. همچنین فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه دی‌ام‌یو مکرر در مجموعه داده‌ها وجود ندارد. با نماد  $x_j$  (ستون  $j$  از  $X$ ) بردار ورودی‌های مصرف‌شده توسط  $DMU_j$  و با نماد  $x_{ij}$  کمیت

ورودی  $i$  مصرف‌شده توسط  $DMU_j$  را نشان می‌دهیم. برای خروجی‌ها نیز از نماد مشابهی استفاده می‌شود. گاهی بردار  $y_j$  را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:  $y_j = \begin{pmatrix} y_j^g \\ y_j^b \end{pmatrix}$  که در آن  $y_j^g$  و  $y_j^b$  به مقادیر خروجی‌های مطلوب و نامطلوب واحد  $j$  اشاره می‌کنند. ما ملاحظات مربوط به مدل بازده به مقیاس ثابت را اجرا می‌کنیم، ولی نتایج را به سایر مدل‌های DEA نیز می‌توان تعمیم داد. با در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به‌عنوان ورودی، مدل DEA مرز بدترین عملکرد زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad \varphi_o &= \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad \varphi_j &= \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4)$$

با اعمال تبدیل چارنر و کوپر [۱۷]، مدل ۴ را می‌توان به مسئله LP زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad \varphi_o &= \sum_{r \in R_D} u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{r \in R_D} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj} &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{ro} &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

### ۲-۳- مدل‌سازی عوامل غیرقابل کنترل

در این قسمت، تحلیل کارایی DEA را برای مواردی که در فرآیند تولید، ورودی‌های

غیرقابل‌کنترل وجود دارند، در نظر می‌گیریم. فرض کنید که متغیرهای ورودی را می‌توان به دو زیرمجموعه قابل‌کنترل و غیرقابل‌کنترل تقسیم کرد. لذا داریم:

$$I = \{1, 2, \dots, m\} = I_D \cup I_{ND}, \quad I_D \cap I_{ND} = \emptyset.$$

که در اینجا  $I_D$  و  $I_{ND}$  به ترتیب به متغیرهای ورودی قابل‌کنترل و غیرقابل‌کنترل اشاره دارند و  $\emptyset$  مجموعه تهی است.

برای ارزیابی صحیح عملکرد مدیریتی شاید لازم باشد که بین ورودی‌های قابل‌کنترل و غیرقابل‌کنترل افتراق قائل شویم که نمونه آن در مدل DEA مرز بدترین عملکرد زیر دیده می‌شود [۱۶]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij} - \sum_{i \in I_D} v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i \in I_D} v_i x_{io} = 1, \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6)$$

### ۳- مدل‌های DEA بازه‌ای بر اساس حساب بازه‌ای

#### ۳-۱- فرمول‌بندی مدل

برخلاف مدل DEA اولیه، در DEA بازه‌ای فرض می‌شود که برخی از مقادیر قطعی ورودی  $x_{ij}$  و خروجی  $y_{rj}$  معلوم نیست؛ این را می‌دانیم که داده‌های ورودی-خروجی در بازه‌های کران‌داری واقع‌اند، یعنی  $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$  و  $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$  که کران‌های بالا و پایین بازه‌ها به‌عنوان عدد ثابت داده شده‌اند، و فرض بر این است که در اینجا  $x_{ij}^L > 0$  و  $y_{rj}^L > 0$ .

فرض کنید  $\phi_j$  کارایی  $DMU_j$  باشد؛ بر اساس مفهوم کارایی، کارایی  $DMU_j$  در حضور عوامل ورودی غیرقابل‌کنترل و عوامل خروجی نامطلوب را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\phi_j = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj} - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij} + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}}, \quad j = 1, \dots, n$$

با جایگذاری ورودی‌ها و خروجی‌های بازه‌ای و با استفاده از قوانین داده‌های بازه‌ای داریم [۱۹]:

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{\sum_{r \in R_D} u_r [y_{rj}^L, y_{rj}^U] - \sum_{i \in I_{ND}} v_i [x_{ij}^L, x_{ij}^U]}{\sum_{i \in I_D} v_i [x_{ij}^L, x_{ij}^U] + \sum_{r \in R_{UD}} u_r [y_{rj}^L, y_{rj}^U]} = \frac{\left[ \sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U, \sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^L \right]}{\left[ \sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^L, \sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U \right]} \\ &= \left[ \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^L}, \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^L}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U} \right], \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

واضح است که  $\phi_j$  بایستی یک عدد بازه‌ای باشد که آن را با نماد  $[\phi_j^L, \phi_j^U]$  مشخص می‌کنیم.  
فرض کنید

$$\phi_j = [\phi_j^L, \phi_j^U] = \left[ \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^L}, \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^L}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U} \right] \subseteq [1, \infty), \quad j = 1, \dots, n.$$

آنگاه

۱. به طور شهودی، وقتی که داده‌ها نادقیق هستند، نمرات کارایی حساب شده از داده‌ها نیز باید نادقیق باشند. به عبارت دیگر، نمرات کارایی باید به صورت دامنه باشند، نه به صورت مقادیر دقیق.

$$\phi_j^L = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\phi_j^U = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^L}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^L} < \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

به منظور اندازه‌گیری کران بالا و پایین کارایی بدینانه  $DMU_0$ ، مدل‌های برنامه‌ریزی کسری زیر را برای  $DMU_0$  ایجاد می‌کنیم:

$$\min \quad \phi_0^L = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{r0}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{i0}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{i0}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{r0}^U}$$

$$\text{s.t.} \quad \phi_j^L = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m.$$

$$\min \quad \phi_0^U = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{r0}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{i0}^L}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{i0}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{r0}^L}$$

$$\text{s.t.} \quad \phi_j^L = \frac{\sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U}{\sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m.$$

با استفاده از تبدیل چارنر و کوپر [۱۷]، مدل‌های برنامه‌ریزی کسری فوق را می‌توان برای حل تبدیل به مدل‌های LP زیر کرد:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \phi_o^L = \sum_{r \in R_D} u_r y_{ro}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{io}^U \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U - \sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U - \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i \in I_D} v_i x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{ro}^U = 1, \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \phi_o^U = \sum_{r \in R_D} u_r y_{ro}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{io}^L \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r \in R_D} u_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i x_{ij}^U - \sum_{i \in I_D} v_i x_{ij}^U - \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{rj}^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i \in I_D} v_i x_{io}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r y_{ro}^L = 1, \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, S; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{10}$$

در مدل‌های ۹ و ۱۰،  $\phi_o^L$  بدترین کارایی نسبی تحت نامطلوب‌ترین موقعیت و  $\phi_o^U$  بدترین کارایی نسبی تحت مطلوب‌ترین موقعیت برای  $DMU_o$  هستند. آن‌ها برای  $DMU_o$  بازه‌ی کارایی بدبینانه‌ی  $[\phi_o^L, \phi_o^U]$  را ارائه می‌کنند.

درباره ارتباط میان  $\phi_o^L$  و  $\phi_o^U$  قضیه زیر را داریم.

**قضیه ۱:** فرض کنید  $\phi_o^{L*}$  و  $\phi_o^{U*}$  مقادیر بدترین کارایی‌های نسبی  $DMU_o$  باشند که به ترتیب بر اساس مدل‌های ۹ و ۱۰ تعیین شده‌اند، آنگاه  $\phi_o^{L*} \leq \phi_o^{U*}$  و تنها زمانی که تمام داده‌های ورودی و خروجی برای  $DMU_o$  از داده‌ی بازه‌ای به داده‌ی دقیق هم‌تراز گردد، تساوی رخ می‌دهد.

**برهان:** فرض کنید  $u_r^*$  ( $r = 1, \dots, S$ ) و  $v_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ) نامطلوب‌ترین وزن‌های مدل ۱۰ باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \gamma_o &= \sum_{i \in I_D} v_i^* x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r^* y_{ro}^U, \\
 \tilde{u}_r &= \frac{u_r^*}{\gamma_o}, \quad r = 1, \dots, S, \\
 \tilde{v}_i &= \frac{v_i^*}{\gamma_o}, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$



نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma_o &= \sum_{i \in I_D} v_i^* x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r^* y_{ro}^U \geq \sum_{i \in I_D} v_i^* x_{io}^L + \sum_{r \in R_{UD}} u_r^* y_{ro}^L = 1, \\ \sum_{i \in I_D} \tilde{v}_i x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} \tilde{u}_r y_{ro}^U &= \sum_{i \in I_D} \left( \frac{v_i^*}{\gamma_o} \right) x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} \left( \frac{u_r^*}{\gamma_o} \right) y_{ro}^U = \frac{1}{\gamma_o} \left( \sum_{i \in I_D} v_i^* x_{io}^U + \sum_{r \in R_{UD}} u_r^* y_{ro}^U \right) = 1, \\ \sum_{r \in R_D} \tilde{u}_r y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} \tilde{v}_i x_{ij}^U - \sum_{i \in I_D} \tilde{v}_i x_{ij}^U - \sum_{r \in R_{UD}} \tilde{u}_r y_{rj}^U \\ &= \frac{1}{\gamma_o} \left( \sum_{r \in R_D} u_r^* y_{rj}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i^* x_{ij}^U - \sum_{i \in I_D} v_i^* x_{ij}^U - \sum_{r \in R_{UD}} u_r^* y_{rj}^U \right) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \tilde{u}_r &= \frac{u_r^*}{\gamma_o} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ \tilde{v}_i &= \frac{v_i^*}{\gamma_o} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

بدیهی است که  $\tilde{u}_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) و  $\tilde{v}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) جواب‌های شدنی مدل ۹ هستند؛ بنابراین داریم:

$$\sum_{r \in R_D} \tilde{u}_r y_{ro}^L - \sum_{i \in I_{ND}} \tilde{v}_i x_{io}^U \geq \varphi_o^{L*}$$

و

$$\begin{aligned} \varphi_o^{U*} &= \sum_{r \in R_D} u_r^* y_{ro}^U - \sum_{i \in I_{ND}} v_i^* x_{io}^L \geq \sum_{r \in R_D} u_r^* y_{ro}^L - \sum_{i \in I_{ND}} v_i^* x_{io}^U \\ &= \sum_{r \in R_D} \gamma_o \tilde{u}_r y_{ro}^L - \sum_{i \in I_{ND}} \gamma_o \tilde{v}_i x_{io}^U = \gamma_o \left( \sum_{r \in R_D} \tilde{u}_r y_{ro}^L - \sum_{i \in I_{ND}} \tilde{v}_i x_{io}^U \right) \geq \gamma_o \varphi_o^{L*} \geq \varphi_o^{L*}. \end{aligned}$$

در نامعادله فوق تساوی فقط زمانی برقرار است که  $y_{ro}^L = y_{ro}^U$  ( $r = 1, \dots, s$ ) و

$$\square \quad (i = 1, \dots, m) \quad x_{io}^U = x_{io}^L$$

برای قضاوت در مورد اینکه یک دی‌ام‌یو در حضور متغیرهای ورودی غیرقابل‌کنترل و عوامل خروجی نامطلوب، ناکارای بدبینانه هست یا نه، تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

**تعریف ۱:**  $DMU_o$  را در حضور متغیرهای ورودی غیرقابل‌کنترل و عوامل خروجی نامطلوب، ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه می‌نامیم، اگر کران پایین بازه‌ی کارایی بدبینانه‌ی آن  $\phi_o^{L*} = 1$  باشد؛ در غیر این صورت، اگر  $\phi_o^{L*} > 1$  باشد، گفته می‌شود که غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه است.

#### ۴- مثال توضیحی

در این قسمت، یک مثال عددی را با استفاده از مدل‌های DEA بازه‌ای پیشنهادی بررسی می‌کنیم تا کاربردی بودن و کارآمدی آن را نشان دهیم. تمام مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار GAMS حل می‌شوند. در این مثال، مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی  $\varepsilon = 10^{-6}$  منظور شده است.

#### ۴-۱- یک کاربرد در زنجیره سرما

شرکت صنایع شیر ایران (پگاه) در سال ۱۳۳۳ برای تولید محصولات لبنی تأسیس شد. امروز بعد از ۶۳ سال، شرکت پگاه در میان ۱۰۰ شرکت برتر ایران قرار دارد. همچنین شرکت پگاه یک تولیدکننده و صادرکننده بزرگ و پیشگام انواع مختلف محصولات لبنی در ایران است. شرکت پگاه از ۵۰ شرکت مختلف تشکیل می‌شود. برخی از آن‌ها مانند شرکت خدمات تجاری و شرکت پروتئین پگاه در مرحله فرآیند پیش‌تولید دخالت دارند. این شرکت‌ها با هدف افزایش تعداد دامداری‌ها و توسعه دامداری‌های موجود و در نتیجه، افزایش تولید شیر خام با کیفیت بالاتر تأسیس شده‌اند. هفده شرکت دیگر مسئول تولید و فرآوری شیر خام و محصولات لبنی دیگر هستند. ۲۷ شرکت دیگر مسئول فروش و صادرات هستند. این شرکت‌ها بزرگ‌ترین زنجیره توزیع محصولات لبنی در کشور هستند و مسئولیت ارزیابی بازار را نیز بر عهده دارند. به‌منظور پاسخ‌گویی به نیاز مصرف‌کنندگان سنین مختلف و در نظر گرفتن سلیقه متفاوت، شرکت پگاه روی بیش از ۳۰۰ محصول گوناگون کار می‌کند. محصولات عمده شرکت عبارت‌اند از شیر، ماست،

پنیر، خامه، دوغ، کره، کشک، بستنی، پودرهای شیری، آب‌معدنی و آبمیوه. یکی از مراکز توزیع اصلی پگاه در نزدیکی تهران واقع است. موجودی این مرکز توزیع هرروزه به تمام استان‌ها فرستاده می‌شود. ۲۹ عامل فروش اصلی وجود دارند که برای ارزیابی کارایی انتخاب می‌شوند. در اینجا، عوامل فروش به‌عنوان دی‌ام‌یو در نظر گرفته می‌شوند. اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌های عوامل فروش در جدول ۲ نشان داده شده است. مجموعه داده‌ها از مقاله شعبانی و همکاران [۲۰] گرفته شده است. اتلاف سالانه و فاصله هر عامل فروش از مرکز توزیع دو ورودی مسئله هستند. فروش سالانه، سطح بهداشتی و ظرفیت یخچال، خروجی‌های مسئله محسوب می‌شوند که به ترتیب به‌صورت داده‌های عددی، ترجیح ترتیبی و داده‌های بازه‌ای هستند. دقت کنید که فاصله هر عامل فروش یک عامل غیرقابل‌کنترل است، زیرا مدیریت، هیچ‌گونه کنترلی بر روی آن ندارد. از آنجاکه سطح بهداشتی به‌صورت اطلاعات ترجیح ترتیبی نشان داده شده است، لذا باید آن را به اطلاعات بازه‌ای تبدیل کرد.

برای این مثال، پارامتر شدت ترجیح و پارامتر نسبت درباره اطلاعات ترجیح ترتیبی قوی (خروجی دوم) به ترتیب به‌صورت  $\chi_2 = 1.03$  و  $\sigma_2 = 0.03$  برآورد شده‌اند. با استفاده از روش تبدیل شرح داده‌شده در [۱۴]، می‌توانیم یک برآورد بازه را برای خروجی دوم هر دی‌ام‌یو به دست آوریم که در ستون دوم جدول ۳ نشان داده شده است.<sup>۱</sup> برای نشان دادن روش تبدیل اطلاعات ترجیح ترتیبی قوی شرح داده‌شده در [۱۴]، برآورد بازه‌ای برای  $DMU_5$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{y}_{3,5} \in [\sigma_2 \chi_2^{n-j}, \chi_2^{1-j}] = [0.03(1.03)^{29-26}, 1.03^{1-26}] = [0.0328, 0.4776]$$

بنابراین، همه‌ی داده‌های ورودی و خروجی اکنون تبدیل به اعداد بازه‌ای شده‌اند و می‌توان آن‌ها را با زوج مدل DEA بازه‌ای پیشنهادی ارزیابی کرد. در مورد داده‌های دقیق، آن‌ها را می‌توان نوع خاصی از داده‌های بازه‌ای دانست که کران‌های پایین و بالای مساوی دارند. جدول ۳ نتایج سنجش کارایی بیست‌ونه دی‌ام‌یو را تحت دیدگاه بدبینانه به‌دست‌آمده با استفاده از مدل‌های DEA بازه‌ای ۹ و ۱۰ نشان می‌دهد (بدون در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌ها). ارزیابی این دی‌ام‌یوها به‌وسیله مدل ۹ نشان می‌دهد که شش دی‌ام‌یو،

۱. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای بحث بیشتر درباره چگونگی تبدیل اطلاعات ترجیح ترتیبی به داده‌های بازه‌ای به مقاله‌ی وانگ و همکاران [۱۴] مراجعه کنند.

یعنی  $DMU_4$ ،  $DMU_7$ ،  $DMU_1$ ،  $DMU_{13}$ ،  $DMU_{23}$  و  $DMU_{28}$ ، ناکارای بدبینانه یا ناکارای DEA هستند و مرز بدترین عملکرد را تشکیل می‌دهند. بیست‌دی‌ام‌یو دیگر به‌عنوان غیرناکارای بدبینانه یا غیرناکارای DEA شناسایی شده‌اند.

جدول ۲ داده‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌های ۲۹ عامل فروش

شماره	DMU	ورودی‌ها		خروجی‌ها	
		اتلاف سالانه (دلار)	فاصله (km)	فروش سالانه (دلار)	ظرفیت بچقال (kg)
۱	اهواز	۱۵۷,۵۵۶	۸۸۱	۱۱,۴۸۳,۰۹۹	۷ [۲۲۰۰, ۲۶۵۰]
۲	اراک	۷۹,۱۴۲	۲۸۸	۵,۴۱۸,۱۶۶	۲۹ [۸۹۰, ۱۲۵۰]
۳	اردبیل	۴۸,۳۵۲	۵۸۸	۲,۹۴۶,۱۱۱	۲۵ [۳۸۶, ۴۹۵]
۴	بندر عباس	۱۴۱,۷۲۱	۱۵۰۱	۳,۱۶۹,۲۵۵	۹ [۷۰۰, ۸۵۰]
۵	بیرجند	۱۹۸,۴۰۷	۱۳۱۳	۱۰,۴۲۵,۳۷۳	۲۶ [۹۷۷, ۱۰۴۳]
۶	بجنورد	۷۱,۴۴۳	۱۳۶۷	۸,۸۵۳,۹۳۸	۲۸ [۱۲۷۵, ۱۴۲۵]
۷	بوشهر	۳۳۳,۰۶۲	۱۲۱۵	۱۰,۲۷۵,۸۶۷	۲۴ [۷۰۰, ۷۹۵]
۸	گرگان	۱۳۳,۸۹۹	۳۸۱	۸,۶۴۵,۶۷۸	۱۹ [۶۹۰, ۸۵۰]
۹	همدان	۸۶,۱۰۲	۳۳۶	۶,۳۴۳,۷۷۴	۱۰ [۸۰۰, ۹۹۵]
۱۰	ایلام	۳۸۰,۴۷۵	۷۱۰	۸۳۶,۴۳۱	۲۲ [۵۷۸, ۸۱۱]
۱۱	اصفهان	۸۵,۴۲۵	۴۱۴	۲۴,۱۱۵,۲۸۸	۶ [۹۷۸, ۱۲۰۳]
۱۲	کرمان	۲۹۹,۱۱۹	۱۰۶۴	۶,۷۹۹,۵۰۲	۱۲ [۱۱۷۱, ۱۳۸۹]
۱۳	کرمانشاه	۲۹۳,۹۲۰	۵۲۵	۳,۴۷۹,۷۸۲	۱۱ [۷۷۵, ۱۰۱۲]
۱۴	خرم‌آباد	۹۹,۶۷۴	۱۰۰۱	۵,۰۰۳,۲۱۶	۱۴ [۱۵۰۰, ۱۸۲۶]
۱۵	مشهد	۱۶۷,۹۰۸	۹۲۴	۱۸,۷۷۰,۳۵۸	۴ [۱۲۲۱, ۱۴۵۸]
۱۶	ارومیه	۹۰,۱۵۵	۹۴۶	۳,۳۵۶,۱۶۹	۱۳ [۵۴۱, ۷۹۹]
۱۷	قزوین	۶۴,۸۴۳	۱۵۰	۱,۵۹۸,۵۹۶	۵ [۸۸۹, ۱۱۱۳]
۱۸	قم	۵۶,۹۷۳	۱۳۲	۱,۹۵۹,۷۲۷	۸ [۵۹۴, ۷۱۲]
۱۹	رشت	۲۱۷,۴۰۱	۳۲۳	۴,۲۵۱,۶۶۲	۱۵ [۶۸۰, ۸۶۰]
۲۰	سنندج	۱۴۴,۷۸۷	۵۱۲	۴,۹۲۷,۸۳۱	۲۰ [۶۹۵, ۸۳۲]
۲۱	ساری	۱۱۶,۰۶۴	۲۵۰	۶,۸۷۳,۱۴۹	۱۶ [۱۵۰۰, ۱۹۴۸]
۲۲	سمنان	۲۳۷,۱۲۱	۲۲۸	۳,۱۷۳,۰۰۵	۲۱ [۷۲۳, ۹۸۰]
۲۳	شهرکرد	۷۱,۱۲۵	۵۲۱	۲,۵۱۰,۲۳۷	۲۳ [۹۰۵, ۱۰۲۵]
۲۴	شیراز	۱۱۳,۵۲۴	۸۹۵	۱۹,۹۹۲,۱۲۴	۱ [۶۵۰, ۶۸۳]
۲۵	تبریز	۹۷,۵۶۰	۶۲۴	۱۴,۳۵۷,۹۱۴	۲ [۹۸۵, ۱۱۰۲]
۲۶	یاسوج	۲۰۱,۱۵۰	۷۳۸	۴,۳۶۰,۲۱۴	۱۸ [۷۵۱, ۹۹۰]
۲۷	یزد	۷۲,۶۱۸	۶۷۷	۵,۰۸۰,۱۴۲	۳ [۷۰۰, ۹۶۰]
۲۸	زاهدان	۲۹,۰۸۷۰	۱۶۰۵	۸,۴۳۰,۴۳۱	۲۷ [۷۳۰, ۷۶۰]
۲۹	زنجان	۹۹,۳۴۴	۳۳۰	۴,۸۳۸,۶۸۰	۱۷ [۷۰۰, ۷۴۵]

<sup>a</sup> مقیاس ترتیبی از ۱=بهرترین تا ۲۹=بدترین.

جدول ۳ داده‌های ترتیبی تبدیل‌شده و بازه‌ی کارایی‌های بدبینانه برای ۲۹ عامل فروش

بازه کارایی بدبینانه ( $[\phi_j^{L*}, \phi_j^{U*}]$ )	داده‌های ترتیبی تبدیل‌شده $y_{rj}$	DMU
[۳/۴۸۳۱, ۶/۱۵۶۰]	[۰/۰۵۷۵, ۰/۸۳۷۵]	۱
[۳/۴۱۲۰, ۵/۷۸۲۶]	[۰/۰۳۰۰, ۰/۴۳۷۱]	۲
[۲/۰۷۷۲, ۳/۷۶۶۷]	[۰/۰۳۳۸, ۰/۴۹۱۹]	۳
[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۰۰۰]	[۰/۰۵۴۲, ۰/۷۸۹۴]	۴
[۱/۵۷۶۵, ۲/۶۲۵۶]	[۰/۰۳۲۸, ۰/۴۷۷۶]	۵
[۴/۰۵۶۶, ۸/۰۷۳۱]	[۰/۰۳۰۹, ۰/۴۵۰۲]	۶
[۱/۰۰۰۰, ۱/۳۳۴۶]	[۰/۰۳۴۸, ۰/۵۰۶۷]	۷
[۲/۹۹۹۴, ۳/۴۱۵۷]	[۰/۰۴۰۳, ۰/۵۸۷۴]	۸
[۴/۴۱۷۱, ۴/۹۹۱۸]	[۰/۰۵۲۶, ۰/۷۶۶۴]	۹
[۱/۰۰۰۰, ۱/۱۵۵۴]	[۰/۰۳۶۹, ۰/۵۳۷۵]	۱۰
[۷/۱۴۵۶, ۹/۲۷۰۰]	[۰/۰۵۹۲, ۰/۸۶۲۶]	۱۱
[۱/۱۸۸۴, ۱/۷۷۶۴]	[۰/۰۴۹۶, ۰/۷۲۲۴]	۱۲
[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۰۰۰]	[۰/۰۵۱۱, ۰/۷۴۴۱]	۱۳
[۲/۷۸۰۶, ۳/۹۳۵۷]	[۰/۰۴۶۷, ۰/۶۸۱۰]	۱۴
[۳/۸۵۶۵, ۵/۳۲۸۲]	[۰/۰۶۲۸, ۰/۹۱۵۱]	۱۵
[۱/۸۵۱۸, ۲/۵۴۳۸]	[۰/۰۴۸۱, ۰/۷۰۱۴]	۱۶
[۲/۰۸۲۳, ۲/۰۸۲۳]	[۰/۰۶۱۰, ۰/۸۸۸۵]	۱۷
[۲/۹۰۵۴, ۲/۹۰۵۴]	[۰/۰۵۵۸, ۰/۸۱۳۱]	۱۸
[۱/۳۴۰۳, ۱/۵۵۰۴]	[۰/۰۴۵۴, ۰/۶۶۱۱]	۱۹
[۲/۰۰۴۲, ۲/۴۰۹۵]	[۰/۰۳۹۱, ۰/۵۷۰۳]	۲۰
[۳/۱۵۲۷, ۵/۰۰۱۹]	[۰/۰۴۴۱, ۰/۶۴۱۹]	۲۱
[۱/۰۰۰۰, ۱/۱۳۰۳]	[۰/۰۳۸۰, ۰/۵۵۳۷]	۲۲
[۲/۶۱۴۳, ۲/۷۳۴۷]	[۰/۰۳۵۸, ۰/۵۲۱۹]	۲۳
[۳/۵۴۰۹, ۳/۸۲۷۹]	[۰/۰۶۸۶, ۱/۰۰۰۰]	۲۴
[۶/۶۴۶۰, ۶/۹۸۰۱]	[۰/۰۶۶۶, ۰/۹۷۰۹]	۲۵
[۱/۳۹۵۱, ۱/۷۳۰۶]	[۰/۰۴۱۵, ۰/۶۰۵۰]	۲۶
[۴/۳۴۱۲, ۵/۳۰۹۹]	[۰/۰۶۴۷, ۰/۹۴۲۶]	۲۷
[۱/۰۰۰۰, ۱/۰۴۶۹]	[۰/۰۳۱۸, ۰/۴۶۳۷]	۲۸
[۳/۰۴۰۳, ۳/۲۶۴۴]	[۰/۰۴۲۸, ۰/۶۲۳۲]	۲۹

کارایی بدبینانه نوعی ارزیابی اکید ارائه می‌کند و غالباً با مفهوم طبیعی ذهنی ما مطابقت دارد؛ خصوصاً در مواردی که مسئله‌های بیزار از مخاطره مطرح هستند. این مفید است که کارایی در نامطلوب‌ترین شرایط را بدانیم و دی‌ام‌یوها را بر اساس آن مقایسه کنیم. در زندگی روزمره، زمانی که انتظار داریم احساس امنیت کنیم، به‌طور

بدینانه تصمیم‌گیری می‌کنیم. ارزیابی دی‌ام‌یوها صرفاً بر مبنای کارایی بدینانه روشی قابل قبول و عقلانی است. کارایی بدینانه نشان‌دهنده عدم‌کفایت کارایی در مقایسه با ورودی-خروجی ایده‌آل است که مختص  $DMU_0$  است. همه دی‌ام‌یوها در مقایسه با دی‌ام‌یوی کاذب ایده‌آل متناظر خود، مقداری نارسایی دارند. این مشخص می‌کند که  $DMU_0$  چقدر می‌تواند از دی‌ام‌یوی دارای کمترین نارسایی فاصله داشته باشد که کاراترین دی‌ام‌یو از نظر کارایی بدینانه است. به‌طور مشابه، کارایی خوش‌بینانه مشخص می‌کند که  $DMU_0$  چقدر ممکن است به کاراترین دی‌ام‌یو نزدیک باشد. و بالاخره، آنچه در اینجا می‌خواهیم بر آن تأکید کنیم، این است که هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدینانه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک‌طرفه خواهد بود [۲۱، صص ۱۵۳-۱۷۳؛ ۲۲، صص ۹۹-۱۱۷؛ ۲۳، صص ۱۳۲۵-۱۳۳۲]. یک مجموعه‌ی نمره‌دهی عملکرد باید مشتمل بر هر دوی آن‌ها باشد [۲۴، صص ۱۹۷-۲۱۶؛ ۲۵، صص ۱۲۹-۱۴۴؛ ۲۶، صص ۱۹۱-۲۱۷].

## ۵- نتیجه‌گیری

روش DEA برای اندازه‌گیری کارایی سیستم‌های تولیدی به کار می‌رود که ورودی‌های متعددی را مصرف می‌کنند و خروجی‌های متعددی را تولید می‌نمایند. در شرایط نرمال، مطلوب این است که ورودی‌های کمتری مصرف شوند و خروجی‌های بیشتری تولید شوند، زیرا این کار منجر به کارایی بالاتری می‌شود. در رابطه با دی‌ام‌یوهای غیرکارا، می‌توان هدف‌های بهبود را مشخص کرد تا بتوان کارایی آن‌ها را افزایش داد. اما مواردی هست که در آن تصمیم‌گیرنده هیچ‌گونه کنترلی بر روی عوامل ورودی و خروجی ندارد، از این نظر که تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند این عوامل را به صلاحدید خود کم و زیاد کند. مدل‌های متعارف DEA، یا قادر به کار با چنین مواردی نیست و یا اینکه نتایج گمراه‌کننده‌ای به دست می‌دهد.

مطالعات معدودی درباره اندازه‌گیری عملکرد منتشر شده‌اند که هم‌زمان خروجی‌های نامطلوب و متغیرهای غیرقابل‌کنترل را در نظر گرفته باشند. در برخی از مطالعاتی که خروجی‌های نامطلوب را در نظر گرفته‌اند، از متغیرهای غیرقابل‌کنترل چشم‌پوشی شده است؛ یعنی فرض آن‌ها بر این است که همه ناکارایی، ناشی از ضعف مدیریت است. بنابراین، عملکرد دی‌ام‌یوها در شرایط نسبتاً نامطلوب پایین

ارزیابی می‌شود.

در مقاله حاضر، رویکرد DEA مرز بدترین عملکرد را برای اندازه‌گیری کارایی‌های دی‌امیوها با داده‌های نادقیق توسعه دادیم. همچنین برای پیدا کردن کل محدوده کارایی نادقیق، از یک روش حساب بازه‌ای استفاده شد که در آن کران بالا و پایین کارایی نادقیق برای هر دی‌امیو محاسبه می‌شود. مدل‌های DEA بازه‌ای پیشنهادی، داده‌های قطعی، اطلاعات ترجیح ترتیبی، بازه‌ای، عوامل نامطلوب و عوامل غیرقابل کنترل را به‌طور هم‌زمان برای اندازه‌گیری کارایی‌های نسبی دی‌امیوها در نظر می‌گیرند. همچنین مدل‌های DEA بازه‌ای پیشنهادی از مرز تولید ثابت و یکپارچه (مرز یکتا) به‌عنوان محک برای اندازه‌گیری کارایی همه دی‌امیوها استفاده می‌کنند که این موضوع منجر به منطقی‌تر و پایاتر گشتن مدل‌ها شده است. مدل‌های DEA بازه‌ای پیشنهادی می‌توانند بدترین دی‌امیوها را به‌آسانی و به‌درستی شناسایی کنند. از آنجا که کارایی بدبینانه تحت نامطلوب‌ترین شرایط ممکن به دست می‌آید، لذا قابل قبول است که تصمیم‌گیرندگان، دی‌امیوها را بر اساس آن نمره‌دهی کنند. عموماً هر چه کارایی بدبینانه بزرگ‌تر باشد، دی‌امیو بهتر ارزیابی می‌شود. روش پیشنهادی برای مجموعه‌ای از داده‌های واقعی متشکل از ۲۹ دی‌امیو با دو ورودی و سه خروجی مورد آزمون قرار گرفت.

## ۶- سپاسگزاری

مؤلفان مایل‌اند از سردبیر و داور ناشناس برای نظرات و پیشنهادهای سازنده‌شان که به رساندن کیفیت مقاله به سطح استاندارد کنونی آن کمک کرد، تشکر کنند.

## ۷- منابع

- [1] Paradi, J.C., Asmild, M., Simak, P.C. Using DEA and worst practice DEA in credit risk evaluation, *Journal of Productivity Analysis*, 21, 2004, 153–165.
- [2] Pendharkar, P.C. A potential use of data envelopment analysis for the inverse classification problem, *Omega*, 30, 2002, 243–248.
- [3] Pille, P., Paradi, J.C. Financial performance analysis of Ontario (Canada)

- Credit Unions: An application of DEA in the regulatory environment, *European Journal of Operational Research*, 139, 2002, 339–350.
- [4] Cielen, A., Peeters, L., Vanhoof, K. Bankruptcy prediction using a data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 154, 2004, 526–532.
- [5] Sueyoshi, T. DEA-discriminant analysis: Methodological comparison among eight discriminant analysis approaches, *European Journal of Operational Research*, 169, 2006, 247–272.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 1978, 429–444.
- [7] Jahanshahloo, G.R., Afzalinejad, M. A ranking method based on a full-inefficient frontier, *Applied Mathematical Modelling*, 30, 2006, 248–260.
- [8] Liu, F.F., Chen, C.L. The worst-practice DEA model with slack-based measurement, *Computers & Industrial Engineering*, 57, 2009, 496–505.
- [9] Cook, W.D., Kress, M., Seiford, L. On the use of ordinal data in data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society*, 44, 1993, 133–140.
- [10] Cook, W.D., Kress, M., Seiford, L. Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors, *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1996, 945–953.
- [11] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA, *Management Science*, 45, 1999, 597–607.
- [12] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. An illustrative application of IDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company, *Operations Research*, 49, 2001, 807–820.
- [13] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) with CMDs (Column Maximum Decision Making Units), *Journal of the Operational Research Society*, 52, 2001, 176–181.



- [14] Wang, Y.-M., Greatbanks, R., Yang, J.-B. Interval efficiency assessment using data envelopment analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, 153(3), 2005, 347–370.
- [15] Parkan, C., Wang, Y.-M. *Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier*, Working Paper, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong, 2000.
- [16] Azizi, H., Ganjeh Ajirlu, H. Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 2011, 4149–4156.
- [17] Charnes, A., Cooper, W.W. Programming with fractional functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 1962, 181–186.
- [18] Dyckhoff, H., Allen, K. Measuring ecological efficiency with data envelopment analysis (DEA), *European Journal of Operational Research*, 132, 2001, 312–325.
- [19] Moore, R.E. *Method and Application of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [20] Shabani, A., Farzipoor Saen, R., Torabipour, S.M.R. A new benchmarking approach in Cold Chain, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 2012, 212–224.
- [21] Azizi, H. Efficiency assessment in data envelopment analysis using efficient and inefficient frontiers, *Management Research in Iran*, 16(3), 2012, 153–173. (In Persian)
- [22] Azizi, H., Bahari, A., Jahed, R. A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis, *Journal of Applied Mathematics*, 10, 2014, 99–117. (In Persian)
- [23] Azizi, H., Wang, Y.-M. Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units, *Measurement*, 46(3), 2013, 1325–1332.
- [24] Azizi, H., Amirteimoori, A. Flexible measures in production process: A

- new approach based on double-frontier DEA, *Modern Researches in Decision Making*, 2(2), 2017, 197–216. (In Persian)
- [25] Azizi, H., Jafari Shaerlar, A., Farzipoor Saen, R. A new approach for considering a dual-role factor in supplier selection problem: DEA with efficient and inefficient frontiers, *Journal of Production & Operations Management*, 6(2), 2016, 129–144. (In Persian)
- [26] Azizi, H., Jahed, R. Suppliers selection in volume discount environments in the presence of both cardinal and ordinal data: A new approach based on double frontiers DEA, *Management Research in Iran*, 19(3), 2015, 191–217. (In Persian)