

مسائل مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی تحت نرم L_p

آریا سلیمانی کورنده¹، جعفر فتحعلی^{2*}، مرتضی نظری³

- 1- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
- 2- دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
- 3- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

پذیرش: 1397/10/19

دریافت: 1397/4/28

چکیده

نظریه مکان‌یابی یکی از مباحث مهم در بهینه‌سازی و تحقیق در عملیات است. در مسائل مکان‌یابی، هدف پیدا کردن مکان یک یا چند سرویس‌دهنده به گونه‌ای است که معیارهایی مانند هزینه حمل‌ونقل، مسافت طی شده توسط مشتریان، زمان کل سرویس‌دهی و هزینه ناشی از آن بهینه شود. در این مقاله، ما به مسئله مکان‌یابی آرمانی می‌پردازیم که در آن، مکان تعدادی مشتری در صفحه داده شده است و حالت ایده‌آل این است که مکان سرویس را چنان تعیین کنیم که فاصله سرویس‌دهنده تا مشتری i ام برابر R_i باشد، اما چون چنین جوابی همواره موجود نیست، به دنبال کمینه‌کردن مجموع خطای حاصل از فاصله سرویس‌دهنده تا نقطه ایده‌آل هستیم. دو نوع تابع هدف کمینه‌کردن مجموع مربعات خطا و مجموع قدر مطلق در حالتی که تابع فاصله تحت نرم L_p اندازه‌گیری می‌شود، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس از الگوریتم‌های شبه‌وایزفیلد، گاوس-نیوتن و الگوریتم فراابتکاری رقابت استعماری برای حل

آن‌ها استفاده می‌کنیم. در انتها، نتایج عددی حاصل از حل الگوریتم‌های ارائه‌شده را با هم مقایسه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: مکان‌یابی آرمانی؛ الگوریتم شبه‌وایزفیلد؛ الگوریتم گاوس-نیوتن؛ رقابت استعماری.

1- مقدمه

انتخاب موقعیت مناسب برای استقرار تسهیلات، جستجویی است برای یافتن مکانی که بتوان با نیازهای خاص تسهیلات مربوط هماهنگ شود. نیازهای مربوط به استقرار و انتخاب موقعیت محل تسهیلات با توجه به معیارهای موردنظر، مکان‌یابی نامیده می‌شود [1].

مسائل مربوط به نظریه مکان‌یابی با توجه به مؤلفه‌های مهمی از قبیل حضور مستمر در زندگی و برنامه‌ریزی انسانی، ماهیت استراتژیک و به‌کارگیری منابع عظیمی از سرمایه، تأثیرات اقتصادی بلندمدت و پیچیدگی محاسباتی، در چندین دهه گذشته توجه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده‌اند [2]. مکان‌یابی تسهیلات و تأسیسات از کاربردی‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی است که گستره آن بسیاری از شاخه‌های علوم را در بر می‌گیرد. از جمله این شاخه‌ها می‌توان به تحقیق در عملیات، علوم مدیریت، مهندسی صنایع، جغرافیا و دیگر شاخه‌های مرتبط اشاره کرد. توجه به مسائل مکان‌یابی، سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود؛ به‌طوری‌که مکان‌یابی یک فعالیت، اعم از یک بنگاه خرده‌فروشی، کارخانه، مرکز خدماتی و غیره، از مهم‌ترین پرسش‌های پیش روی یک فعالیت اقتصادی است تا آنجا که این مسئله می‌تواند تأثیرات بسزایی در موفقیت یا شکست آن داشته باشد [3].

در طول دهه‌های اخیر، توجه و علاقه‌مندی به مسائل محیطی و دنیای واقعی کاربردی افزایش پیدا کرده است. این مسائل عمدتاً در نتیجه پیشرفت‌های صنعتی و فناوری ایجاد شده‌اند و غالباً تأثیرات منفی در محیط و مشکلات زیست‌محیطی را به دنبال می‌آورند. مسائلی مانند استقرار یک سرویس‌دهنده که در عین تأمین خدمات و تقاضای مشتریان، اثرات نامطلوبی مثل سروصدا، گردوخاک، گازهای سمی، بوی بد، شلوغی، تشعشعات هسته‌ای و غیره را بر مشتریان تحمیل می‌کند، از این دسته هستند.

تصمیم‌گیری در مورد احداث چنین سرویس‌دهندگانی در دنیای واقعی و زندگی، کار پیچیده و دشواری بوده و تعداد آن‌ها نیز قابل‌توجه است. مکان‌یابی چنین سرویس‌دهندگانی که هم دارای تأثیرات مثبت و هم تأثیرات منفی بر روی مشتریان هستند، مکان‌یابی آرمانی نام‌گذاری شده است. بنابراین با توجه به اهمیت موضوع و وجود بسیاری از مسائل در دنیای واقعی که با استفاده از مفهوم مکان‌یابی آرمانی به صورت ریاضی مدل می‌شوند، در این مقاله به بررسی یک مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی پرداخته می‌شود.

این مقاله در پنج بخش تهیه شده است. در بخش دوم، مبانی نظری و پیشینه تحقیق بیان می‌شود. در بخش سوم، مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی با در نظر گرفتن توابع خطای گوناگون، به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. در بخش چهارم، قضایایی برای وجود جواب در مدل‌های پیشنهادی، اثبات و برای حل آن‌ها الگوریتم‌های شبه‌وایزفیلد¹ (LWA)، گاوس - نیوتن² (GN) و فراابتکاری رقابت استعماری³ (ICA) بیان می‌شود. در بخش پایانی نیز مدل‌های ارائه شده در بخش سوم و چهارم روی چندین مثال عددی بررسی و تحلیل می‌شوند.

2- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

مسائل مکان‌یابی به دنبال یافتن محل و نحوه استقرار بهینه یک یا چند سرویس‌دهنده براساس عوامل و متغیرهای مؤثر بر مکان‌یابی هستند. معمولاً در این مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری (سرویس‌گیرنده/نقطه تقاضا) موجود هستند و هدف پیدا کردن بهترین مکان برای استقرار سرویس‌دهندگان جدید است؛ به گونه‌ای که هزینه حمل‌ونقل، تأثیرات محیطی نامطلوب، زمان سرویس‌دهی، سود، کیفیت، نحوه توزیع سرویس و رعایت انصاف و برابری در آن، کسب بیشترین سهم در بازار و غیره، بسته به شرایط مسئله بهینه شود [2].

1. Like Weiszfeld Algorithm
2. Gauss Newton Algorithm
3. Imperialist Competitive Algorithm

زمان پیدایش مسائل مکان‌یابی به اوایل قرن هفدهم میلادی و به مسئله‌ای که فرما⁴ مطرح کرد، بر می‌گردد. مسئله مطرح شده توسط فرما به این صورت بود که «یک مثلث را در نظر بگیرید که وزن هریک از رئوس آن 1+ باشد، نقطه چهارم را به‌گونه‌ای پیدا کنید که مجموع فواصل وزنی آن تا رئوس مثلث کمینه شود.» فسیبندر مفهوم دوگانی را برای مسئله فرما مطرح کرد که بعدها در سال 1967 توسط کوهن به‌طور مبسوطی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی از تحقیقات وی منتشر شد [4].

نظریه مکان‌یابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر در سال 1909 تحت عنوان «در مورد مکان صنایع» متولد شد [5]. وبر در این کتاب نتایج تحقیقات خود را در مورد صنایع کارخانه‌ای ارائه کرد. در واقع، اولین تعریف مسئله مکان‌یابی به صورت کاربردی توسط وبر ارائه شده است. تحقیقات انجام شده در زمینه مکان‌یابی از گستردگی بسیار زیادی برخوردار بوده و کاربردهای عملی وسیعی در زمینه‌های گوناگون داشته است. از زمانی که مسئله کلاسیک وبر در سال 1909 به صورت تعیین موقعیت یک انبار فرمول‌بندی شده، تاکنون نظریه مکان‌یابی بخش فعالی از تحقیقات را در 30 سال گذشته به خود اختصاص داده است.

مسائل مکان‌یابی در توابع هدف، فواصل مورد استفاده، تعداد و اندازه سرویس‌دهنده‌هایی که باید تأسیس شوند و همچنین در چندین عامل دیگر متفاوت هستند. هونگ ژونگ جیا و همکاران هشت عامل را که در دسته‌بندی مدل‌های مکان‌یابی تسهیلات مؤثر هستند، معرفی کردند [6]. این هشت عامل عبارت‌اند از: مشخصات جغرافیایی، خصوصیات تسهیلات، اهداف، روش حل، الگوهای تقاضا، انواع زنجیره عرضه، افق زمانی و مولفه‌های ورودی. بنابراین، بسته به نوع هدف و با استفاده از هر یک از این شاخص‌ها، مدل‌های گوناگون مسئله مکان‌یابی به دست می‌آید. از این‌رو، مسائل مکان‌یابی پیوسته نوع خاصی از مسائل مکان‌یابی هستند که در آن‌ها هدف یافتن مکان یک یا چند سرویس‌دهنده روی صفحه است. یکی از شناخته‌شده‌ترین و مهم‌ترین مسائل مکان‌یابی پیوسته، مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای فرما-وبر است. در این مسئله n نقطه در صفحه موجود بوده و هدف یافتن نقطه‌ای جدید در صفحه

4. Fermat

است؛ به طوری که مجموع کل فواصل نقاط موجود تا نقطه بهینه کمینه شود [7]. مدل ریاضی یک مسئله فرما-وبر را می‌توان به صورت رابطه 1 بیان کرد.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (w_i d(X, v_i)). \quad (1)$$

در رابطه 1 منظور از $d(X, v_i)$ ، فاصله بین سرویس‌دهنده X و نقاط تقاضای v_i است. w_i نیز وزن مربوط به هر نقطه تقاضای v_i است. نمونه‌های گوناگون از مسئله مکان‌یابی وبر را می‌توان در مراجع [8-10] مشاهده نمود. وایزفیلد در سال 1937 یک الگوریتم گرادیانی برای حل مسئله فرما-وبر ارائه کرد [11].

در ادامه، بسیاری از محققان از الگوریتم وایزفیلد برای حل مدل‌های گوناگون مسائل مکان‌یابی استفاده نمودند. به‌طور مثال، میهل در سال 1958 الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل مکان‌یابی چندوسيله‌ای و با نرم اقلیدسی گسترش داد [12]. ایستر و همکاران در سال 1973 الگوریتم وایزفیلد را با استفاده از روش تقریبی هیبربولوئید برای مسائل مکان‌یابی چندوسيله‌ای با نرم‌های خطی و اقلیدسی گسترش دادند [13]. موریس و وردینی نیز در سال 1973 و موریس در سال 1981 به ترتیب در مقالاتی مجزا، الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل مکان‌یابی با نرم l_p ، مورد بحث قرار دادند و الگوریتم‌هایی شبه‌وایزفیلد برای مسائل خود ارائه کردند [14، 15]. واردی و ژانگ در سال 2001 الگوریتم وایزفیلد را برای حل مسئله فرما-وبر اصلاح کردند [16]. بعدها در سال 2009 بریمبرگ و همکاران در مقاله‌ای الگوریتم وایزفیلد را برای یک مسئله تک‌وسيله‌ای با تابع هدف کمترین مجموع و تحت نرم‌های ترکیبی l_p گسترش دادند [17]. همچنین لایجن و بن ایسرائیل در سال 2010 الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل تخصیص مورد استفاده قرار دادند [18]. فتحعلی نیز در سال 2014 مسئله مکان‌یابی پشتیبان چندوسيله‌ای در صفحه را با ارائه یک الگوریتم شبه‌وایزفیلد حل کرد [19].

از طرف دیگر باید توجه داشت که در طول دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیار زیادی برای ایجاد مدل‌های مکان‌یابی که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند، انجام گرفته است. یکی از کاربردی‌ترین مسائلی که در دنیای واقعی و در

زندگی شهری وجود دارد، مکان‌یابی سرویس‌دهندگانی است که دارای تأثیرات مثبت و تأثیرات منفی بر روی مشتریان هستند. فتحعلی و همکاران یک مسئله مکان‌یابی وبر را با در نظر گرفتن این خصوصیت که یک سرویس‌دهنده می‌تواند هم‌زمان دارای تأثیرات مطلوب و نامطلوب باشد، مورد بررسی قرار دادند و این مسئله را مسئله مکان‌یابی آرمانی نامیدند [20]. آن‌ها در این مسئله برای هر نقطه تقاضا، یک شعاع آرمانی را در نظر گرفته و فاصله بین تسهیلات جدید و نقاط تقاضا را برابر با شعاع آرمانی متناظر با هر نقطه تقاضا تعیین کردند. آن‌ها با استفاده از روش هندسی مربع بزرگ مربع کوچک الگوریتمی برای حل مسئله تحت نرم اقلیدسی پیشنهاد دادند. سپس جمالیان و فتحعلی یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله با هدف کمینه‌کردن مجموع وزنی قدرمطلق خطا، ارائه کردند. اخیراً فتحعلی و جمالیان به بررسی مسئله کمینه‌کردن مجموع مربعات خطا پرداخته و آن را مسئله مکان‌یابی وبر مربعی آرمانی⁵ (GSWLP) نامیدند [21]. آن‌ها با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی پرندگان به حل مسئله فوق تحت نرم اقلیدسی پرداختند. در جدول 1، مقالاتی که مسائل مکان‌یابی آرمانی را مورد بررسی قرار داده‌اند، آورده شده است.

جدول 1 بررسی مسائل مکان‌یابی آرمانی

تابع خطا		نرم فاصله			روش حل				تعداد سرویس‌دهندگان		نام نویسندگان
									$n > 1$	$n = 1$	
قدر مطلق	مربع	l_p	l_2	l_1	فراابتکاری	گرادینتی	وازیفیک	هندسی			
-	✓	-	✓	-	-	-	-	✓	-	✓	فتحعلی و همکاران [20]
✓	-	-	✓	-	-	✓	-	-	-	✓	جمالیان و فتحعلی [21]
-	✓	-	✓	-	✓	-	-	-	-	✓	فتحعلی و جمالیان [22]
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-	-	✓	مقاله حاضر

5. Goal Square Weber Location Problem

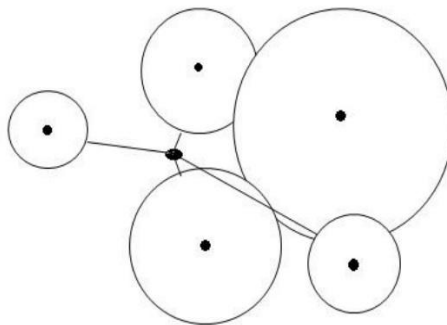
3- مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی با نرم l_p

3-1- بیان مسئله

مکان‌یابی تأسیسات و تسهیلاتی مانند استادیوم‌ها، کارخانه‌ها، ماشین‌آلات، نیروگاه‌ها، مراکز دفن پسماند، بیمارستان‌ها و سرویس‌دهندگانی از این قبیل که هم دارای تأثیرات مثبت و هم تأثیرات منفی بر روی مشتریان هستند، به دلیل کاربرد بسیار آن در دنیای واقعی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ایده‌ای که برای مدل‌سازی این مسائل در [20] پیشنهاد شده است، در نظر گرفتن یک کران مشترک (شعاع آرمانی) بین مشتریان و سرویس‌دهندگان است. فتحعلی و جمالیان [22] این مسئله را مسئله مکان‌یابی آرمانی نام‌گذاری کردند. در یک مسئله مکان‌یابی آرمانی، برای هر مشتری یک شعاع آرمانی در نظر گرفته شده است و هدف پیدا کردن مکانی برای سرویس‌دهندگان است؛ به طوری که فاصله آن‌ها تا مشتریان دقیقاً برابر با شعاع آرمانی متناظر با هر مشتری باشد. اما از آنجایی که در واقعیت ممکن است چنین نقطه‌ای پیدا نشود، این مکان (نقطه) چنان برآورد می‌شود که فاصله آن تا نقاط تقاضا، تا حد امکان به شعاع‌های آرمانی متناظر نزدیک شود. انتخاب این مکان برآورد شده، ضرر و زیان‌هایی (خطایی) را نسبت به نقطه ایده‌آل در پی خواهد داشت. هدف در این مسئله، کمینه‌شدن زیان ناشی از انتخاب این مکان در صفحه است.

به‌عنوان مثالی از این موضوع، فرض شود که باید فروشگاه‌های در یک شهر احداث شود. با توجه به ساختار زندگی شهری، نحوه و توزیع جمعیت، هر چه فروشگاه به مرکز شهر و مناطق پرجمعیت نزدیک‌تر باشد، از یک طرف دسترسی ساکنان افزایش یافته و متوسط هزینه حمل‌ونقل آن‌ها کاسته شده و تقاضای مشتریان به خوبی برآورده می‌شود و از طرف دیگر، احداث فروشگاه در چنین جایگاه‌هایی هزینه‌های زیادی (خرید زمین و مالیات و...) در پی خواهد داشت. تصمیم‌گیری برای احداث چنین سرویس‌دهندگانی در دنیای واقعی کار پیچیده و دشواری است. برای مدل‌سازی این مسائل، یک کران مشترک (شعاع آرمانی) برای دوری و نزدیکی از مرکز شهر در نظر گرفته می‌شود که این کران مشترک، معیاری برای جلب رضایت مشتریان و مدیران است؛ لذا با تعیین یک کران مشخص برای فاصله از مرکز شهر،

مسئله با هدف کمترین مجموع خطای فاصله از کران‌های مذکور مدل می‌شود. در حقیقت، میزان خطای دوری از این کران کمینه می‌شود. نمایش گرافیکی مسئله برای پنج نقطه تقاضا و برای شعاع‌های گوناگون در شکل 1 نشان داده شده است.



شکل 1 نمای گرافیکی مسئله مکان‌یابی آرمانی

3-2- مدل‌سازی مسئله

فرض شود n نقطه تقاضای (مشتریان) X_1, \dots, X_n در صفحه موجود باشد که متناسب با هر نقطه تقاضای X_i ، یک شعاع آرمانی R_i و یک وزن مثبت W_i وجود دارد. در این صورت با توجه به تعریف مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی، هدف یافتن یک مکان جدید است؛ به طوری که فاصله وزنی بین این نقطه جدید و نقاط تقاضای X_i ، دقیقاً برابر با شعاع آرمانی R_i شود. در حقیقت باید میزان خطای دوری از این کران کمینه شود. فرض شود که $X_i = (a_i, b_i)$ مختصات نقاط تقاضا و $X = (x, y)$ مختصات مکانی مجهولی باشد که باید سرویس‌دهنده موردنظر مکان‌یابی شود، در این صورت مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی با نرم l_p به صورت رابطه 2 مدل‌سازی می‌شود:

$$\min f_R(X) = \sum_{i=1}^n w_i e(d_{l_p}(X, X_i) - R_i) \quad (2)$$

که w_i وزن مربوط به هر نقطه تقاضای X_i ، شعاع آرمانی متناظر با نقطه تقاضای X_i است و $e(d(X, P_i) - R_i)$ مفهوم خطا را بیان می‌کند که $d_{l_p}(X, P_i)$ فاصله بین دو نقطه تحت نرم l_p است؛ یعنی:

$$d_{l_p}(X, P_i) = \left(|x - a_i|^p + |y - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

حال اگر تابع خطا در رابطه 2، به صورت تابع مجموع مربعات خطا در نظر گرفته شود، مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی با مجموع مربعات خطا به شکل 4 بدست می‌آید:

$$\min f_R(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left(d_{l_p}(X, X_i) - R_i \right)^2 \quad (4)$$

و اگر تابع خطای $e(d(X, P_i) - R_i)$ ، یک تابع خطای قدرمطلق در نظر گرفته شود، در این صورت، مسئله با مجموع خطای قدر مطلق به شکل 5 مدل‌سازی می‌شود.

$$F_R(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left| d_{l_p}(X, P_i) - R_i \right| \quad (5)$$

مسائل مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی با توابع هدف 4 و 5 دارای جواب بهینه هستند و قضایای 1 و 2 برای آن‌ها برقرار است.

قضیه 1- جواب بهینه مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی 4 در پوسته گسترش‌یافته مستطیلی نقاط $X_i = (a_i, b_i)$ قرار دارد.
اثبات: قرار دهید

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\min} = \min\{a_i - R_i \mid i = 1, \dots, n\} \\ a_{\max} = \max\{a_i + R_i \mid i = 1, \dots, n\} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} b_{\min} = \min\{b_i - R_i \mid i = 1, \dots, n\} \\ b_{\max} = \max\{b_i + R_i \mid i = 1, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

همچنین مجموعه نقاط $RH_1=(a_{\min}, b_{\min})$ ، $RH_2=(a_{\min}, b_{\max})$ ، $RH_3=(a_{\max}, b_{\max})$ و $RH_4=(a_{\max}, b_{\min})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X=(x, y)$ خارج از پوسته مستطیلی نقاط RH_1 ، RH_2 ، RH_3 و RH_4 قرار داشته باشد. در حالت اول، فرض کنید $x > a_{\max}$ ؛ اگر $X'=(a_{\max}, y)$ نتیجه می‌شود:

$$d_{l_p}(X, P_i) = (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} > (|a_{\max} - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} = d_{l_p}(X', P_i) > R_i$$

$$\cdot \left((|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right)^2 > \left((|a_{\max} - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right)^2$$

و با توجه به مثبت بودن ضرایب W_i ، به دست می‌آید که $f_R(X) > f_R(X')$ و لذا $X=(x, y)$ نمی‌تواند جواب بهینه باشد. برای حالت‌هایی که $x < a_{\min}$ ، $y < b_{\min}$ و $y > b_{\max}$ نیز به صورت کاملاً مشابه اثبات می‌شود که نقاط X نمی‌توانند جواب‌های بهینه باشند. بنابراین، نتیجه گرفته می‌شود که جواب بهینه مسئله در پوسته مستطیلی حاصل از نقاط RH_1 ، RH_2 ، RH_3 و RH_4 قرار دارد.

قضیه 2- جواب بهینه مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی 5 در پوسته

گسترش‌یافته مستطیلی نقاط $X_i=(a_i, b_i)$ قرار دارد.

$$\text{اثبات: قرار دهید که } \begin{cases} a_{\min} = \min\{a_i - R_i | i=1, \dots, n\} \\ a_{\max} = \max\{a_i + R_i | i=1, \dots, n\} \end{cases} \quad \begin{cases} b_{\min} = \min\{b_i - R_i | i=1, \dots, n\} \\ b_{\max} = \max\{b_i + R_i | i=1, \dots, n\} \end{cases}$$

باشد. همچنین مجموعه نقاط $RH_1=(a_{\min}, b_{\min})$ ، $RH_2=(a_{\min}, b_{\max})$ ، $RH_3=(a_{\max}, b_{\max})$ و $RH_4=(a_{\max}, b_{\min})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X=(x, y)$ باشد و X خارج از پوسته مستطیلی نقاط RH_1 ، RH_2 ، RH_3 و RH_4 قرار داشته باشد. در حالت اول فرض کنید $y > b_{\max}$ ، اگر $X'=(x, b_{\max})$ ، آنگاه:

$$d_{l_p}(X, P_i) = (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} > (|x - a_i|^p + |b_{\max} - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} = d_{l_p}(X', P_i) > R_i$$
 بنابراین، $\left| (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right| > \left| (|x - a_i|^p + |b_{\max} - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right|$ ، و با توجه به مثبت بودن ضرایب w_i به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \left(w_i \left| (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right| \right) > \sum_{i=1}^n \left(w_i \left| (|x - a_i|^p + |b_{\max} - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right| \right)$$

پس نتیجه گرفته می‌شود که $f_R(X) > f_R(X')$ و بنابراین، $X = (x, y)$ نمی‌تواند جواب بهینه باشد. برای حالت‌هایی که $x > a_{\max}$ ، $x < a_{\min}$ و $y < b_{\min}$ نیز به صورت کاملاً مشابه اثبات می‌شود که نقاط X نمی‌توانند جواب‌های بهینه باشند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که جواب بهینه مسئله در پوسته مستطیلی حاصل از نقاط RH_2, RH_1, RH_3 و RH_4 قرار دارد.

لم 1- توابع هدف مسائل مکان‌یابی 4 و 5 نامحدب هستند.

لم 2- مشتقات توابع هدف مسائل مکان‌یابی 4 و 5 ممکن است در هر جایی از صفحه تعریف نشده باشند.

4- الگوریتم‌های حل مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی

در این بخش، مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای 4 با استفاده از سه الگوریتم شبه‌وایزفیلد ارائه شده در این مقاله، و الگوریتم‌های گاوس-نیوتن و فرابتنکاری رقابت استعماری حل می‌شود. مسئله مکان‌یابی 5 نیز مشابه مسئله 4 حل خواهد شد.

4-1- الگوریتم شبه‌وایزفیلد

با توجه به لم 2 برای اینکه تابع هدف مسئله 4، یک تابع هموار باشد، قرار داده می‌شود:

$$f_R^h(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left(d_{l_p}^h(X, P_i) - R_i \right)^2 \quad (6)$$

که در آن،

$$d_p^h(X, P_i) = l_p^h(X, P_i) = \left(\left((x - a_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \left((y - b_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

و ϵ یک مقدار کوچک و مثبت است. این تابع، تقریبی از تابع هدف مسئله 4 است و در لم 3، خطای این تقریب نشان داده شده است.

لم 3- تابع هدف تقریب زده شده‌ی مسئله تک‌وسیله‌ای آرمانی با نرم l_p و با مجموع مربعات خطا یعنی $f_R^h(X)$ ، به تابع هدف مسئله اصلی یعنی $f_R(X)$ همگرا است و همچنین

$$\left| f_R^h(X) - f_R(X) \right| \leq 4^{\frac{1}{p}} \epsilon \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) + 2^{\frac{p+1}{p}} \epsilon^{0.5} \left(\sum_{i=1}^n (w_i R_i) \right) \quad (8)$$

اثبات: از 4 و 6 به دست می‌آید:

$$\left| f_R^h(X) - f_R(X) \right| = \left| \sum_{i=1}^n w_i \left(\left((x - a_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \left((y - b_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} - R_i \right| - \sum_{i=1}^n w_i \left(\left(|x - a_i|^p + |y - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} - R_i \right)^2 \right|$$

با قرار دادن $s_3 = \vartheta^5$ ، $s_2 = y - b_i$ ، $s_1 = x - a_i$ و با استفاده از نامساوی

$$\left| f_R^h(X) - f_R(X) \right| \leq 4^{\frac{1}{p}} \epsilon \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) + 2^{\frac{p+1}{p}} \epsilon^{0.5} \left(\sum_{i=1}^n (w_i R_i) \right)$$

بنابراین وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود که $\max \left\{ \left| f_R^h(X) - f_R(X) \right| \right\} \rightarrow 0$.

از آنجایی که مسئله 6 دارای مشتقات جزئی پیوسته است، از شرط لازم بهینگی می‌توان یک جواب بهینه موضعی برای آن پیدا نمود. با توجه به لم 3، این جواب بهینه یک جواب برای مسئله اصلی 4 نیز می‌باشد.

از شرط لازم بهینگی برای 7 به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_R^h(X)}{\partial X} = 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot (x - a_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Ra_i} \right), \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot (y - b_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Rb_i} \right) \right) \quad (9)$$

که در آن، $Ra_i = \left((x - a_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{2-p}{2}}$ ، $Sa_i = \left(\left((x - a_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \left((y - b_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}$ و $Rb_i = \left((y - b_i)^2 + \vartheta^2 \right)^{\frac{2-p}{2}}$ است. بنابراین، با مساوی صفر قرار دادن رابطه 9 نتیجه گرفته می‌شود که:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot a_i}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Ra_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Ra_i} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot b_i}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Rb_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Rb_i} \right)} \right) \quad (10)$$

بنابراین اگر $X^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$ ، یک نقطه شروع اولیه باشد، فرمول تکراری زیر به دست می‌آید:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot a_i}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Ra_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Ra_i} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i) \cdot b_i}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Rb_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i - R_i)}{(Sa_i)^{p-1} \cdot Rb_i} \right)} \right) \quad (11)$$

که منظور از t ، شمارنده الگوریتم در هر مرحله است. رابطه 11 به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) = \left(x^{(t)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Ra_i^{(t)}} \right)} \frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial x}, y^{(t)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Rb_i^{(t)}} \right)} \frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial y} \right) \quad (12)$$

به طوری که:

$$\frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Ra_i^{(t)}} (x^{(t)} - a_i) \right), \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Rb_i^{(t)}} (y^{(t)} - b_i) \right) \end{pmatrix} \quad (13)$$

بنابراین با توجه به روابط 12 و 13 اگر قرار داده شود:

$$d^{(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Ra_i^{(t)}} (x^{(t)} - a_i) \right), \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Rb_i^{(t)}} (y^{(t)} - b_i) \right) \end{pmatrix} \quad (14)$$

به روشنی مشخص است که $d^{T(t)} \cdot \nabla f_R^h(X^{(t)}) < 0$ است. قرار دهید

$W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i (Sa_i^{(t)} - R_i)}{(Sa_i^{(t)})^{p-1} \cdot Rb_i^{(t)}} \right)$ ، اگر $W > 0$ باشد، آنگاه دنباله $y^{(t+1)}$ روی خط تندترین

کاهش قرار دارد و اگر $W < 0$ باشد، دنباله $y^{(t+1)}$ روی خط تندترین افزایش قرار دارد.

در حالتی که $W < 0$ در تکرار بعدی الگوریتم، نقطه شروع $2y^{(t)} - y^{(t+1)}$ در نظر گرفته

می‌شود. به‌طور مشابه برای دنباله $x^{(t+1)}$ نیز در صورت منفی بودن ضریب گرادیان

از نقطه شروع $2x^{(t)} - x^{(t+1)}$ استفاده می‌شود. بنابراین، $\{f_R^h(X^{(t)})\}$ یک دنباله غیر

افزایشی است. سه لم زیر برای 11 بیان و اثبات می‌شود.

لم 4- اگر $X^{(t+1)} = X^{(t)}$ باشد، آنگاه $\frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X} = 0$ است.

اثبات: در رابطه 12، اگر $X^{(t+1)} = X^{(t)}$ باشد، در این صورت، $d^{(t)T} \cdot \frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X} = 0$ و در نتیجه، $\frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X} = 0$ است.

لم 5- اگر $X^{(t+1)} \neq X^{(t)}$ باشد، آنگاه $f_R^h(X^{(t+1)}) < f_R^h(X^{(t)})$ است.

اثبات: با توجه به رابطه 12، اگر $X^{(t+1)} \neq X^{(t)}$ ، در این صورت، $\frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X} \neq 0$ است. با قرار دادن $d = -\frac{\partial f_R^h(X^{(t)})}{\partial X}$ نتیجه گرفته می‌شود که $d^T \cdot \nabla f_R^h(X^{(t)}) < 0$ است و لذا $f_R^h(X^{(t+1)}) < f_R^h(X^{(t)})$.

لم 6- اگر $f_R^h(X^{(t+1)}) = f_R^h(X^{(t)})$ ، آنگاه $X^{(t+1)} = X^{(t)}$ است.

اثبات: $f_R^h(X^{(t+1)}) = f_R^h(X^{(t)})$ بدین معنی است که برای هر t ، مسیر $d^{(t)}$ یک مسیر غیرکاهشی است و از لم 5 نتیجه گرفته می‌شود که $X^{(t+1)} = X^{(t)}$.
با توجه به مطالب گفته‌شده الگوریتم شبه‌وایزفیلد به صورت زیر بیان می‌شود:

الگوریتم (LWA):

گام 1) $x^{(0)}$ ، یک تقریب اولیه از جواب بهینه انتخاب کن و قرار بده $k=0$.

گام 2) تا زمان برآورده نشدن شرط توقف، کارهای زیر را انجام بده:

1- $x^{(t+1)}$ را از رابطه 12 محاسبه کن.

2- $y^{(t+1)}$ را از رابطه 12 محاسبه کن.

3- اگر $|f_h^{(k)} - f_h^{(k-1)}| < e$ ، برو به گام 3؛ در غیر این صورت، قرار بده

$k+1 \rightarrow k$.

گام 3) پایان.

باید توجه داشت که یکی از ضعف‌های روش نقطه ثابت در الگوریتم شبه‌وایزفیلد ارائه‌شده، وابسته بودن آن به نقطه شروع و نوسانات در تکرارهای پایانی (به دلیل صفرشدن مخرج و نزدیکی اعداد در تکرارهای پایانی) است. بنابراین، اگر در انتخاب نقطه اولیه دقت نشود، ممکن است آشفتگی‌هایی در تکرارهای این الگوریتم داشته باشیم؛ بدین منظور در ادامه الگوریتم کارای گاوس-نیوتن برای حل مسئله حاضر بیان می‌شود و

برای بررسی درستی جواب‌های به‌دست‌آمده از الگوریتم گاوس-نیوتن، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج الگوریتم فراابتکاری رقابت استعماری نیز مقایسه می‌شود.

2-4- الگوریتم گاوس-نیوتن

الگوریتم گاوس-نیوتن (GN) یکی از روش‌های کارا برای حل مسائل کمترین مربعات خطی است. در الگوریتم GN تابع هدف، تابعی است به‌صورت:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \quad (15)$$

که در آن، φ_j ها توابعی هموار به R هستند و هر φ_j یک باقیمانده نامیده می‌شود. اگر $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))^T$ انگاه:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = \frac{1}{2} \|\varphi(x)\|_2^2 \quad (16)$$

با توجه به 17 گرادیان و هسیان تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_j(x) = J(x)^T \cdot \varphi(x), \quad (17)$$

و

$$\nabla^2 f(x) = J(x)^T \cdot J(x) + \sum_{j=1}^m \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla^2 \varphi_j^T(x). \quad (18)$$

که $J(x)$ ، ماتریس ژاکوبین $f(x)$ است. الگوریتم GN یک روش اصلاح‌شده نیوتن بر پایه جمله اول ماتریس هسیان یعنی $J(x)^T \cdot J(x)$ ، به‌جای در نظر گرفتن کل رابطه 18 است [23]. حال اگر برای هر $i=1,2,\dots,n$ $\varphi_i(x) = \sqrt{2w_i} \cdot (d_{i_p}^h(X, P_i) - R_i)$ باشد، در این صورت مسئله هموار مکان‌یابی 6 به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\min f_R^h(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \left(d_{l_p}^h(X, P_i) - R_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_j(x) = \frac{1}{2} \|\varphi(x)\|_2^2 \quad (19)$$

رابطه 19، یک مسئله به شکل کمترین مربعات است که می‌توان آن را با الگوریتم گاوس-نیوتن حل کرد. بنابراین می‌توان الگوریتم GN را برای حل مسئله 6 به صورت زیر بیان کرد:

الگوریتم GN:

گام 1) $x^{(0)}$ ، یک تقریب اولیه از جواب بهینه انتخاب شود و $k=C$ انتخاب شود؛

گام 2) مقادیر $\varphi_k = \varphi(x_k)$ ، $J_k = J(x_k)$ ، $J_k^T \varphi_k$ و $J_k^T J_k$ محاسبه شوند؛

گام 3) اگر $\|J_k^T \varphi_k\| < \varepsilon$ ، در این صورت انتقال به گام 6؛

گام 4) معادله $J_k^T J_k d = -J_k^T \varphi_k$ را برای $d = d_k$ حل کن.

گام 5) اگر $\|d_k\| < \varepsilon$ بود، برو به گام 6؛ در غیر این صورت،

1-5) $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$ و $k \rightarrow k+1$ قرار داده شوند و انتقال به گام 2.

گام 6) پایان.

α ، مقداری است که از جستجوی خطی به دست می‌آید. روش‌های گوناگون جستجوی خطی برای محاسبه طول گام α وجود دارد که از آن جمله می‌توان به جستجوی خطی ولف اشاره کرد. در جستجوی خطی ولف، α باید در شرایط زیر صدق کند:

$$f(X_k + \alpha d_k) \leq f(X_k) + \rho \alpha \nabla f_k^T d_k \quad (20)$$

و

$$\nabla(X_k + \alpha d_k)^T d_k \geq \sigma \nabla f_k^T d_k \quad (21)$$

به طوری که $0 < \rho < \sigma < 1$ است [23].

3-4- الگوریتم فراابتکاری رقابت استعماری

الگوریتم‌های بهینه‌سازی، مقادیر متغیرهای طراحی را به‌گونه‌ای تغییر می‌دهند تا تابع هدف موردنظر کمینه یا بیشینه شود. روش‌های بهینه‌سازی را می‌توان به‌طور کلی به دو گروه روش‌های گرادیانی و روش‌های جستجو تقسیم نمود. روش‌های جستجو برای مسائل حجیم و مواردی که مشتق‌گرفتن از تابع هدف دشوار است، کارایی زیادی دارند. به‌عنوان نمونه، بشیری و گرمه‌ای در مقاله [24] و نوتاش و همکاران در مقاله [25] از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مسائل مکان‌یابی خود استفاده کرده‌اند؛ هرچند نمی‌توان به‌صراحت در مورد برتری روش‌های تکاملی بالا نسبت به یکدیگر نظر داد و این امر طبق نظریه ${}^6\text{NFLT}$ [26]، از مسئله‌ای به مسئله دیگر متفاوت است.

همانند دیگر الگوریتم‌های تکاملی، این الگوریتم نیز با تعدادی جمعیت اولیه تصادفی که هرکدام از آن‌ها یک کشور نامیده می‌شوند، شروع می‌شود. تعدادی از بهترین عناصر جمعیت (معادل نخبه‌ها در الگوریتم ژنتیک) به‌عنوان امپریالیست⁷ انتخاب می‌شوند. باقیمانده جمعیت نیز به‌عنوان مستعمره⁸ در نظر گرفته می‌شوند. استعمارگران بسته به قدرتشان، این مستعمرات را با یک‌روند خاص به سمت خود می‌کشند. قدرت کل هر امپراتوری، به هر دو بخش تشکیل‌دهنده آن یعنی کشور امپریالیست (به‌عنوان هسته مرکزی) و مستعمرات آن، بستگی دارد. در حالت ریاضی، این وابستگی با تعریف قدرت امپراتوری به‌صورت مجموع قدرت کشور امپریالیست، به‌اضافه درصدی از میانگین قدرت مستعمرات آن، مدل شده است. با شکل‌گیری امپراتوری‌های اولیه، رقابت امپریالیستی میان آن‌ها شروع می‌شود. هر امپراتوری که نتواند در رقابت استعماری موفق عمل کند و بر قدرت خود بیفزاید (یا حداقل از کاهش نفوذش جلوگیری کند)، از صحنه رقابت استعماری حذف خواهد شد. بنابراین بقای یک امپراتوری، وابسته به قدرت آن در جذب مستعمرات امپراتوری‌های رقیب و به‌سیطره درآوردن آن‌ها خواهد بود. در نتیجه، در جریان رقابت‌های امپریالیستی به‌تدریج بر قدرت امپراتوری‌های بزرگ‌تر افزوده شده و

6. No Free Lunch Theorem

7. Imperialist

8. Colony

امپراتوری‌های ضعیف‌تر حذف خواهند شد. امپراتوری‌ها برای افزایش قدرت مجبور خواهند شد تا مستعمرات خود را نیز پیشرفت دهند. با گذشت زمان، مستعمرات از لحاظ قدرت به امپراتوری‌ها نزدیک‌تر خواهند شد و یک نوع همگرایی به دست می‌آید. حد نهایی رقابت استعماری، زمانی است که یک امپراتوری واحد در دنیا وجود داشته باشد و مستعمراتش از لحاظ موقعیت به خود کشور امپریالیست خیلی نزدیک باشند [27].

یک الگوریتم رقابت استعماری دارای مفاهیم و متغیرهایی همچون شکل‌دهی امپراتوری‌های اولیه، حرکت مستعمره‌ها به سمت امپریالیست، جابجایی موقعیت مستعمره و امپریالیست، قدرت کل یک امپراتوری، رقابت استعماری، سقوط امپراتوری‌های ضعیف و همگرایی است. بنابراین، الگوریتم رقابت استعماری را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

الگوریتم رقابت استعماری (ICA):

- گام 1) چند نقطه تصادفی روی تابع انتخاب شود و امپراتوری‌های اولیه تشکیل شوند؛
- گام 2) مستعمرات، به سمت کشور امپریالیست حرکت داده شوند؛
- گام 3) اگر مستعمره‌ای در یک امپراتوری وجود داشته باشد که هزینه‌ای کمتر از امپریالیست داشته باشد، جای مستعمره و امپریالیست با هم تعویض شود؛
- گام 4) قدرت کل یک امپراتوری محاسبه شود (با در نظر گرفتن هزینه امپریالیست و مستعمراتشان)؛
- گام 5) یک مستعمره از ضعیف‌ترین امپراتوری انتخاب شده به امپراتوری که بیشترین احتمال تصاحب را دارد، اختصاص داده شود؛
- گام 6) امپراتوری‌های ضعیف حذف شوند؛
- گام 7) اگر تنها یک امپراتوری وجود داشت، توقف و در غیر این صورت، به گام 2 رجوع شود.

جدول 1 بیانگر مولفه‌های تنظیم‌شده الگوریتم ICA در مقاله حاضر است. این مولفه‌ها از مسئله‌ای به مسئله دیگر قابل تغییر است.

جدول 1 مولفه‌های تنظیم‌شده الگوریتم (ICA)

500	بیشترین تعداد تکرار الگوریتم (Maxit)
50	تعداد کشورهای اولیه ($N_{country}$)
2	تعداد متغیرها (N_{var})
10	تعداد امپراتوری‌های اولیه (N_{np})
2	ضریب نزدیک شدن یک مستعمره به استعمارگر از جهت‌های گوناگون (β)
$U(Q1)$	میزان انحراف یک مستعمره از مسیر مستقیم حرکت به سمت استعمارگر (θ)
0/1	ضریب هزینه متوسط مستعمرات (ξ)
0/1	احتمال انقلاب

5- نتایج محاسباتی

در این قسمت به حل مثال‌های گوناگون از مسائل مطرح‌شده پرداخته می‌شود. مدل‌های ارائه‌شده در بخش 3 و 4 مقاله با سه الگوریتم LWA، الگوریتم GN و الگوریتم ICA حل می‌شوند. برای نشان دادن درستی کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی، ابتدا مثال‌هایی در ابعاد کوچک و با جواب بدیهی انتخاب شده و جواب‌های الگوریتم‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شود و سپس به حل مثال‌هایی با ابعاد بزرگ پرداخته می‌شود.

تمامی الگوریتم‌ها با نرم‌افزار Matlab-R2018a و با استفاده از لپ‌تاپی با مشخصات: Intel(R), Core™ i5-2430M, CPU, 4.00GB RAM پیاده‌سازی شده‌اند.

مثال 1- فرض شود $n=6$ باشد و برای هر $i=1,2,\dots,6$ ، $w_i = 1$ باشد و این نقاط روی یک دایره به مرکز (1و1) و شعاع 1 قرار داشته باشند و برای هر $i=1,2,\dots,6$ ، $R_i = 1$ باشد. مختصات نقاط در جدول 2 آمده است. بدیهی است که مکانی که فاصله آن تا نقاط تقاضا دقیقاً برابر با یک باشد، مرکز دایره است. بنابراین نقطه (0,0)، باید

جواب بهینه مسئله باشد. درستی این امر را می‌توان در نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم‌های LWA، GN و ICA مشاهده کرد.

جدول 2 مختصات نقاط تقاضا ($P_i = (a_i, b_i)$) برای حالت $w_i = R_i = 1$ و $P=2$

نقاط	1	2	3	4	5	6
a_i مولفه اول نقاط	2	1	0	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
b_i مولفه دوم نقاط	1	2	1	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

در مثال بالا، هر سه الگوریتم LWA، GN و ICA به جواب $X = (1, 1)$ رسیدند. در مثال بالا برای الگوریتم LWA و GN، $\varepsilon = 0.0001$ در نظر گرفته شده است.

مثال 2- جداول 3 و 4 حاوی نقاط اولیه و شعاع‌های آرمانی و وزن نقاط تقاضا است. در هر یک از جداول 3 و 4، سه نوع شعاع آرمانی متفاوت برای هر نقطه تقاضا در نظر گرفته شده است. در جداول 5 و 6 به ترتیب، نتایج به‌دست‌آمده از حل داده‌های جداول 3 و 4 برای تابع هدف مسئله 7 آمده است. شکل 2، دو نمای گوناگون از تابع هدف مسئله 6 با داده‌های جدول 3 را برای شعاع آرمانی I نشان می‌دهد. نمودارهای 1 و 2 نیز نحوه کاهش گرادیان تابع هدف مسئله را برای داده‌های جدول 3 و در حالت شعاع آرمانی II، برای هریک از الگوریتم‌های ICA و GN نمایش داده است. جدول 6 نیز نتایج به‌دست‌آمده از داده‌های جدول 4، نسبت به نرم‌های گوناگون P را بیان می‌کند. جدول 7 نتایج به‌دست‌آمده از حل مسئله با الگوریتم‌های ارائه‌شده در مقاله را نسبت به مقادیر گوناگون n و P نشان می‌دهد.

جدول 3 داده‌های یک مسئله با 4 نقطه برای حالت $P=2$

(x, y, w)	شعاع آرمانی I	شعاع آرمانی II	شعاع آرمانی III
(0,0,1)	1	1	2
(1,0,1)	1	2	2

(0,1,1)	1	1	2
(1,1,1)	1	2	2

جدول 4 داده‌های یک مسئله با 30 نقطه برای $R_i = 1$

(x, y, w)	(x, y, w)	(x, y, w)	(x, y, w)	(x, y, w)	(x, y, w)
(1.3.3)	(7.15.2)	(14.15.1)	(3.2.1)	(10.8.1)	(3.10.2)
(1.4.2)	(8.3.1)	(14.3.1)	(4.6.1)	(10.10.3)	(9.11.2)
(2.15.1)	(8.6.3)	(14.1.2)	(4.3.2)	(11.4.2)	(15.15.2)
(2.4.3)	(8.5.1)	(15.8.3)	(6.8.3)	(11.13.3)	(7.14.2)
(3.6.2)	(8.2.1)	(15.10.3)	(6.11.1)	(13.3.1)	(13.7.3)

جدول 5 نتایج به‌دست‌آمده از داده‌های جدول 3 برای $P=2$

		شعاع آرمانی I	شعاع آرمانی II	شعاع آرمانی III
BSSS [20]	X	(0/49.0/51)	(-0/90.0/51)	(-1/42.0/51)
	f	0/34	0/00	0/93
GN	X	(0/50.0/50)	(-0/9049.0/50)	(-1/4228.0/50)
	f	0/3431	0/0042	0/9330
ICA	X	(0/499.0/50)	(-0/9048.0/50)	(0/50.-1/4151)
	f	0/34311	0/0041	0/9276

جدول 6 نتایج به‌دست‌آمده از داده‌های جدول 4 نسبت به مقادیر گوناگون P

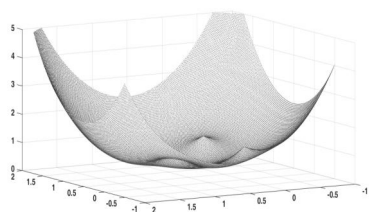
P	f_{GN}	f_{ICA}	$cpu_time(GN)$	$cpu_time(ICA)$
1	3156/0	3156/02	7/27	96/55
1/5	2033/70	2033/71	18/51	64/82
2	1668/1	1668/12	9/33	95/68
3	1404/1	1404/14	9/81	51/84
4	1305/7	1305/69	13/27	61/04

مسائل مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی تحت ... آریا سلیمانی کورنده و همکاران

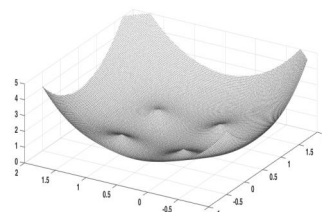
5	1256/8	1256/7	10/96	74/37
10	1185/0	1184/9	8/22	51/63

جدول 7 نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم‌های (GN) و (ICA) نسبت به مقادیر گوناگون n و P

#n	P	f_{GN}	cpu_time(GN)	f_{ICA}	cpu_time(ICA)
100	1/5	84570	19/70	84569/9	166/40
100	2	68995	13/66	68995/2	104/12
100	3	58057	19/39	58056/7	125/69
200	1/5	204050	37/31	204046	365/97
200	2	166250	21/83	166254	151/31
200	3	139940	31/67	139940/1	250/40
300	1/5	288700	38/27	288695/4	457/12
300	2	234310	27/47	234314/3	353/83
300	3	195860	37/22	195855/7	429/16
500	1/5	466920	64/09	466916/4	542/10
500	2	381780	47/54	381779/2	552/10
500	3	321830	63/62	321179/1	573/23
1000	1/5	982630	161/35	982631/3	785/14
1000	2	797150	132/04	79148/4	654/74
1000	3	666170	169/93	666198/4	721/15

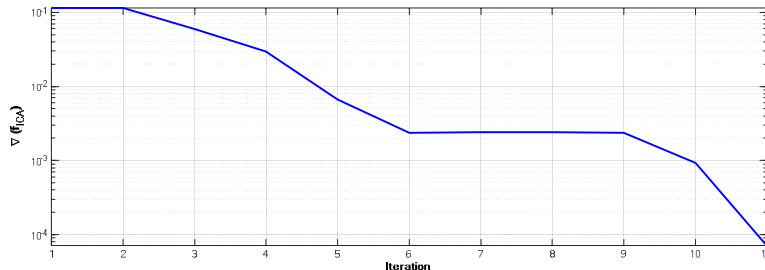


نمای ب

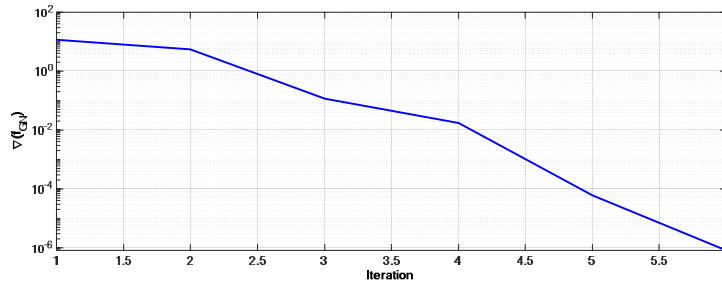


نمای آ

شکل 2 دو نمای گوناگون از تابع هدف مسئله 7 با داده‌های جدول 3 و شعاع آرمانی I



نمودار 1 نمودار کاهش‌ی گرادیان تابع هدف الگوریتم ICA برای مثال جدول 5 با شعاع آرمانی II



نمودار 2 نمودار کاهش‌ی گرادیان تابع هدف الگوریتم GN برای مثال جدول 3 با شعاع آرمانی II

6- نتیجه‌گیری

در طول دهه‌های اخیر، تلاش‌های بسیار زیادی برای ایجاد مدل‌های مکان‌یابی که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند، انجام گرفته است. مفهوم مکان‌یابی آرمانی یکی از این مشخصه‌های پرکاربرد و مهم است. این مقاله یک مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی را تحت توابع جریمه مجموع مربعات خطا و مجموع قدر مطلق خطا مورد بررسی قرار داده است. ابتدا نشان داده شده است که جواب بهینه این مسائل تحت تابع جریمه مربعات خطا و قدر مطلق خطا در پوسته گسترش‌یافته نقاط تقاضا قرار دارد.

برای حل این مدل یک الگوریتم شبه‌وایزفیلد (LWA) ارائه شده است و از آنجایی که الگوریتم‌های مبتنی بر الگوریتم گرادیانی شبه‌وایزفیلد در برخی مسائل ناپایدار است (به دلیل امکان وقوع صفر در مخرج)، لذا مدل ارائه‌شده با استفاده از الگوریتم گاوس-نیوتن (GN) و با جستجوی خطی ولف و الگوریتم فراابتکاری رقابت

استعماری (ICA) نیز حل و جواب‌های به‌دست‌آمده با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج به‌دست‌آمده از حل مثال‌هایی با ابعاد بزرگ و کوچک نشان داده است که جواب‌های به‌دست‌آمده از الگوریتم‌های GN و ICA تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند؛ به‌طوری‌که گرادیان تابع هدف برای یک مثال خاص برای الگوریتم ICA در 11 تکرار (نمودار 2) و برای الگوریتم GN در 9 تکرار (نمودار 1) به سمت صفر میل کرده است. بنابراین با توجه به اینکه زمان اجرای الگوریتم GN نسبت به الگوریتم فراابتکاری ICA به مراتب کمتر است، لذا این الگوریتم گرادیانی از لحاظ زمانی نسبت به الگوریتم ICA از برتری بیشتری برخوردار است. همچنین پیشنهادهای زیر ارائه می‌شود:

به دلیل غیرقطعی بودن ماهیت داده‌ها و نظر تصمیم‌گیرندگان و شرایطی که در عمل پیش می‌آید، داده‌ها و متغیرهای مسئله را می‌توان فازی در نظر گرفته و آن را در حالت فازی نیز بررسی و یک مدل برنامه‌ریزی فازی برای آن ارائه کرد. همچنین می‌توان مسئله را در حالتی که داده‌ها بازه‌ای یا تصادفی باشند، مورد بررسی قرار داد. نگرش دیگری که می‌توان مورد مطالعه قرار گیرد، استفاده از یک تابع نامتقارن خطا مانند تابع لینکس است. همچنین یکی از موانع این تحقیق، ارائه الگوریتم‌هایی مناسب و دقیق با بررسی همگرایی آن‌هاست که می‌تواند موضوع مطالعات بعدی باشد.

7- منابع

- [1] Amiri, M., Taghavi Fard, M. T., Aghaei M., Development of Three-Objective Model for the Location–Allocation of Assistance Centers in a probabilistic Condition of availability to emergency Vehicles, , Modern Researches in Decision Making, 1 (2), 2016, 1-27.
- [2] Nazari, M., Fathali, J., Reverse backup 2-median problem with variable coordinate of vertices, Journal of Operational Research and Its Applications, 15 (2), 2018, 63-88.
- [3] Abbasi, F., Tabriz, A. A., Selection of Bank Branches Location Based on Rough Set Theory – Multi Choice Goal Programming, Modern Researches in Decision Making, 2 (1), 2017, 119-148.

- [4] Kuhn, H.W., On a pair of dual nonlinear programs, *Nonlinear programming*, J., Abadie(ed.), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1967.
- [5] Weber, A., *Über den Standort der Industrien*, Tübingen, (1909), English Trans.: *Theory of Location of Industries*, C.J., Friedrich, ed., and Trans., Chicago University Press, Chicago, Illinois., 1929.
- [6] Honggzhong, J., Fernando, O., Maged, D., A Modeling framework for facility location of medical services for large-scale emergencies, *IIE Transactions*, 39: 1, 41-55.
- [7] Love, R. F., Morris, J. D., and Wesolowsky, G. O., *Facilities locations: Models and methods*, Publications in Operations Research Series, vol. 7, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [8] Brimberg, J., The Fermat-Weber location problem revisited, *Mathematical Programming*, 71, 1995, 71-76.
- [9] Chen, R., Noniterative Solution of Some Fermat-Weber Location Problems, *Advances in Operations Research*, 2011, 10 pages.
- [10] Trinh, M. H., Lee, B.H., and Ahn, H.S., The Fermat-Weber location problem in single integrator dynamics using only local bearing angles, *Auto Matica*, 59, 2015, 90-96.
- [11] Weiszfeld, E., Sur le point par lequel la somme des distances de n points donnés est minimum, *Tohoku Math.*, 43, 1937, 355–386.
- [12] Miehle, W., Link-length minimization in networks, *Oper. Res.*, 6, 1958, 232–243.
- [13] Eyster, J.W., White, J.A., Wierwille, W.W., On solving multifacility location problems using a hyperboloid approximation procedure, *AIIE Transactions*, 5, 1973, 1–6.
- [14] Morris, J.G., Convergence of the Weiszfeld algorithm for Weber problems using a generalized distance function, *Oper. Res.*, 29, 1981, 37–48.
- [15] Morris, J.G., Verdini, W.A., A simple iterative scheme for solving minimum facility location problems involving lp distances, *Oper. Res.*, 27, 1979, 1180–1188.

- [16] Vardi, Y., Zhang, CH., A modified Weiszfeld algorithm for the Fermat-Weber location problem, *Math. Program., Ser. A* 90, 2001, 559–566.
- [17] Brimberg, J., Love, R., Mladenović, N., Extension of the Weiszfeld procedure to a single facility minimum location model with mixed l_p norms, *Math. Meth. Oper. Res.*, 70, 2009, 269-283
- [18] Iyigun, C., Ben-Israel, A., A generalized Weiszfeld method for the multifacility location problem, *Oper. Res. Lett.*, 38, 2010, 207–214.
- [19] Fathali, J., Backup multifacility location problem with l_p norm, *OPSEARCH*, 52, 2014, 382-391.
- [20] Fathali, J., Zaferanieh, M. and Nezakati, A., A BSSS algorithm for the location problem with minimum square error, 2009, *Advances in Operations Research*.
- [21] Fathali, J., Jamalian, A., Efficient methods for goal square Weber location problem, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 7, 2017, 65-82.
- [22] Jamalian, A. and Fathali, J., Linear programming for the location problem with minimum absolute error, *World Applied Sciences Journal*, 7, 2009, 1423-1427.
- [23] Nocedal, J., Wright, S. J., *Numerical Optimization*, Springer, New York, 1999.
- [24] Bashiri, M., Garmeyi, Y., Solving Multi Criteria Gradual Covering Problem Using Simulated Annealing and Artificial Neural Network, *Management Research in Iran*, 17 (4), 2014, 25-41.
- [25] Notash, M., Zandieh, M., Dorri Nokorani, B., Using a Genetic Algorithm Approach for Designing Multi-objective Supply Chain Network, *Management Research in Iran*, 18 (4), 2015, 183-203 .
- [26] Ho, Y. C., and Pepyne, D. L., Simple Explanation of the No Free Lunch Theorem of Optimization, *Proceeding of the 40th IEEE, Conf. on Decision and Control*, USA. 2001.
- [27] Gargari, A., Lucas, E. C., Imperialist Competitive Algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialist competitive, *IEEE Congress on Evolutionary computation*, Singapore, 2007.

Solving single facility 'goal location problems' using L_p norm

Abstract: Location theory is an important field of optimization and operations research. In the classic location problem, the objective is finding the location of one or more facilities such that some criteria such as transportation cost, sum of distances passed by clients, total service time and cost of servicing are minimized. In this paper, we consider the goal location problem. In this problem, the ideal is locating the facility in the distances r_i , from the i -th client. However, in some instances, the solution of this problem doesn't exist. Therefore, we consider the minimizing of distances between clients and ideal point. The minimizing sum of square errors and minimizing absolute errors under L_p norm are considered as the objective function. We use the Weiszfeld like, Gauss-Newton and imperialist competitive algorithms for solving the problem. Then we compare the results which obtained by these methods for some test problems.

Key words: goal location, Weiszfeld like algorithm, Gauss-Newton, imperialist competitive.