پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۹، صص ۱۱۱-۱۳۶

قیمت‌گذاری و کنترل موجودی خرده‌فروش‌های رقیب با کمبود جزئی؛ رویکرد نظریه بازی‌ها

انور محمودی[۱*]، هیبت‌اله صادقی[۲]

۱- استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان
۲- استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان

تاریخ ارسال: ۱۲ / ۰۴ / ۱۳۹۸ تاریخ پذیرش: ۱۰ / ۰۲ / ۱۳۹۹

چکیده

استراتژی قیمت‌گذاری و کنترل موجودی در محیط رقابتی، از مهمترین تصمیمات یک واحد خرده‌فروشی است که بر روی بقا و سوددهی آن به شدت تاثیرگذار است. هنگامی که کالاها فاسدشدنی هستند، اهمیت این تصمیمات دوچندان می‌شود. در این مقاله، مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی در محیط رقابتی برای کالاهای فاسدشدنی فرموله‌بندی و حل می‌شود. بدین منظور تعدادی خرده‌فروش رقیب در نظر گرفته می‌شود که یک کالای فاسدشدنی جایگزین را به یک بازار مشترک عرضه می‌کنند. فرض شده است که کمبود کالا مجاز بوده و به صورت پس افت جزئی است. هر خرده فروش به دنبال تعیین سیاست موجودی و قیمت‌گذاری خود به منظور بیشینه کردن سود است. در ابتدا توابع سود هر خرده‌فروش ارائه شده و وجود تعادل نش[۱] بین خرده‌فروش‌ها ثابت می‌شود. سپس یک روش حل برای تعیین مقادیر تعادلی قیمت و سیاست موجودی خرده‌فروش‌ها ارائه می‌شود. در نهایت، یک مثال عددی به منظور شناسایی اثر پارامترهای مختلف بر روی جواب‌های تعادلی ارائه می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که افزایش شدت رقابت منجر به کاهش مجموع سود خرده‌فروش‌ها و افزایش مجموع تقاضای برآورد شده توسط آنها می‌شود. به علاوه، بر خلاف مدل‌های انحصاری، تغییر نرخ فاسد شدن کالا در یک خرده‌فروش در مدل رقابتی تاثیر زیادی بر روی قیمت خرده‌فروشی او ندارد.

کلمات کلیدی: کنترل موجودی، قیمت‌گذاری، تئوری بازی، تعادل نش، کمبود جزئی

---

* نویسندهٔ مسؤول مقاله E-mail: anwar.mahmoodi@uok.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، پیشرفت در فناوری اطلاعات باعث تسهیل در یکپارچه‌سازی تصمیمات در سازمانهای مختلف از جمله خرده‌فروشی‌ها شده است. به همین دلیل بر خلاف دهه‌های گذشته، در دهه جاری بسیاری از مدل‌های تصمیم‌گیری سعی دارند که عناصر مختلف را در تصمیم‌گیری در نظر گرفته و در تعیین استراتژی‌ها جنبه‌های متفاوت تامین و تقاضا را به صورت همزمان بررسی کنند. یکی از محرک‌های مهم در سمت تقاضا، قیمت است که بر روی درآمد شرکت تاثیر فراوانی دارد. همچنین در سمت تامین، سیاست‌های عملیاتی متفاوتی قرار دارند که بر روی هزینه‌های شرکت تاثیر گذار هستند. یکی از مهمترین این سیاست‌ها مربوط به سیستم کنترل موجودی شرکت است. بنابراین تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی توجه بسیاری از صنعتگران و محققان را به خود جلب کرده است[۱].

بخش بزرگی از کالاهای موجود در خرده‌فروشی‌ها، کالاهای فاسدشدنی هستند. این نوع کالاها در صورتی که قبل از تاریخ انقضا و یا قبل از زمان فاسد شدن خود به فروش نرسند، هزینه‌های زیادی را به سیستم تحمیل می‌کنند. از طرفی اگر به اندازه کافی کالا در سیستم موجود نباشد، کمبود رخ داده و قسمتی از تقاضا از دست می‌رود و از طرف دیگر، اگر کالای زیادی در سیستم موجود باشد علاوه بر افزایش هزینه نگهداری، قسمتی از کالا فاسد شده و هزینه اضافه‌تری بر سیستم تحمیل می‌کنند. در نتیجه تعیین سیاست کنترل موجودی برای کالاهای فاسد شدنی دارای اهمیت بالایی است. همچنین در فضای اقتصادی کنونی، کمتر کالایی به صورت انحصاری به فروش می‌رود و رقابت جزو جدایی‌ناپذیر خیلی از صنایع به شمار می‌رود. بنابراین در نظر گرفتن رقابت، مدل‌های مختلف را به دنیای واقعی نزدیک‌تر می‌کند.

در این پژوهش، تعداد دلخواهی خرده‌فروش رقیب در نظر گرفته می‌شود که یک کالای فاسدشدنی با طول عمر تصادفی را به یک بازار مشترک عرضه می‌کنند. مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی برای هر خرده‌فروش با در نظر گرفتن رقابت مورد تحلیل قرار می‌گیرد. تقاضای هر خرده فروش به صورت تابعی از قیمت فروش خود خرده فروش و رقبای آن بیان می‌شود. همچنین فرض شده است کمبود مجاز بوده که درصدی از آن به صورت فروش از دست رفته و مابقی به صورت پس افت است.

ادامه این مقاله به این صورت سازماندهی شده است که در بخش دوم مبانی نظری و

پیشینه پژوهش بیان شده و خلا تحقیقاتی موجود توضیح داده می‌شود. سپس در بخش سوم روش‌شناسی پژوهش ارائه می‌شود. بخش چهارم به بیان مساله و فرموله کردن آن می‌پردازد. در بخش پنجم، راه‌حل پیشنهادی برای برآورد نقاط تعادل ارائه می‌شود. سپس در بخش ششم، یک مطالعه عددی جهت تبیین حساسیت نقاط تعادل به پارامترهای مهم مساله انجام می‌شود. در نهایت در بخش هفتم، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مقاله انجام شده و جهت‌های تحقیقاتی آتی معرفی می‌شود.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مطالعات زیادی در مورد تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی برای کالاهای فاسد شدنی انجام شده است. اما اکثریت این مطالعات، رقابت را در نظر نگرفته‌اند و مدل خود را برای یک نهاد انحصاری ارائه داده‌اند. یکی از تحقیقات پیشتاز و تاثیرگذار در این حوزه مقاله کوهن [۲] است که در آن مدل قیمت‌گذاری و کنترل موجودی یک کالای فاسد شدنی با طول عمر نمایی در یک خرده‌فروش انحصاری مورد بررسی قرار گرفته است و رویکرد حل برای تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی ارائه داده است. سپس مقالات بیشتری با الهام از این مقاله، مدل مورد نظر را توسعه داده‌اند. به عنوان مثال، دای [۳] مدل مورد نظر را با در نظر گرفتن کمبود جزئی توسعه داده است و مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی را تحلیل کرد. چن [٤] مدل را در دو سطح یک زنجیره تامین در نظر گرفت و با در نظر گرفتن محدودیت تامین تولید کننده و محدودیت سطح سرویس خرده‌فروش مساله را تحلیل نمود. پاندا و همکاران [٥] مدل مذکور را با در نظر گرفتن تخفیف‌های هدفدار به منظور کاهش هزینه‌های فاسدشدن محصول توسعه دادند. در نتیجه آنها قیمت‌گذاری پویا را به جای قیمت‌گذاری ایستا مد نظر قرار دادند و وجود جواب بهینه را برای مدل اثبات کردند. چینتاپالی [٦] با اضافه کردن یک عبارت تصادفی به تابع تقاضا، مدل مذکور را در حالت تقاضای نامعین مورد بررسی قرار داد و تعیین همزمان سیاست کنترل موجودی و قیمت‌گذاری را برای دو دسته کالاهای قدیمی و جدید تبیین نمود.

با تکامل مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی در محیط انحصاری، محققان مدل انحصاری را با تغییر فرضیات تصمیم‌گیری به مدل‌های متفاوتی توسعه داده‌اند. به عنوان مثال

به جای تعیین سیاست موجودی، برنامه‌ریزی تولید و به جای قیمت‌گذاری، سیاست تخفیف‌دهی را در مدل در نظر گرفته‌اند[۷] و یا نوع فاسد شدن را بر اساس کالاهای متفاوت تغییر داده‌اند. به عنوان نمونه، فنگ و همکاران [۸] مساله قیمت‌گذاری و برنامه‌ریزی تولید پویا برای یک کالای فاسدشدنی را به صورت همزمان در نظر گرفتند. آنها با فرض وجود محدودیت ظرفیت تولید، نرخ تولید بهینه در هر قیمت را به دست آوردند. سپس جهت به دست آوردن قیمت بهینه یک الگوریتم حل ارائه دادند. همچنین چوا و همکاران [۹] مساله تعیین سیاست موجودی را با برنامه تخفیف ترکیب کردند و کالاهای فاسدشدنی را با عمر ثابت در نظر گرفتند. آنها علاوه بر تعیین سیاست کنترل موجودی به این سوال پاسخ داده‌اند که قیمت کالاهای قدیمی‌تر چه وقت و چه مقدار تخفیف داده شود. لو و همکاران [۱۰] مساله تعیین همزمان قیمت و برنامه‌ریزی تولید شرکتی را در نظر گرفتند که یک کالا را در دو نوع کلاس بالا و کلاس استاندارد تولید می‌کند. آنها با در نظر گرفتن عدم قطعیت در خروجی محصول با کلاس بالا و عدم قطعیت در تقاضا، فرض کردند که در صورت نیاز شرکت می‌تواند محصول با کلاس بالا را به محصول در کلاس استاندارد تبدیل نماید. سپس الگوریتمی برای ارائه سیاست بهینه مدل خود توسعه دادند. بعضی از مطالعات مساله تعیین قیمت و سیاست موجودی کالاهای فاسد شدنی را با فرض وجود اعتبار تجاری مطالعه کرده‌اند[۱۱, ۱۲]. آگی و سونی [۱۳] فرض کردند که تابع تقاضا علاوه بر قیمت، به سطح موجودی و عمر محصول نیز وابسته است و مساله تعیین توام قیمت و سیاست موجودی را با لحاظ کردن تابع تقاضای مذکور بررسی کردند. در واقع با این تابع تقاضا آنها علاوه بر فاسد شدن فیزیکی کالا، تنزیل درجه آن را نیز در نظر گرفتند.

تمامی مقالات فوق مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی کالاهای فاسدشدنی را در یک محیط انحصاری مدل کرده‌اند. در حالی که در دنیای واقعی، بازار مربوط به اکثر کالاها رقابتی است و در نظر گرفتن رقابت در فروش محصولات فاسد شدنی امری لازم و ضرروری است. مدل رقابتی این مساله در ادبیات موضوع با در نظر گرفتن کالاهای غیرفاسدشدنی در مقالات محدودی مورد بررسی قرار گرفته است و برای کالاهای فاسدشدنی با فرض رقابتی بودن بازار فروش، تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی به ندرت مورد بررسی قرار گرفته است. برنستین و فدرگروئن [۱٤, ۱۵] رقابت خرده‌فروشان را در یک زنجیره دوسطحی در نظر گرفتند و جواب‌های تعادلی قیمت و سیاست موجودی را ارائه دادند. آنها در مدل خود کالاها را

غیر فاسدشدنی در نظر گرفتند. آدیدا و پراکیس [۱۶] مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی را برای دو خرده‌فروش رقیب با کالاهای غیر فاسدشدنی در نظر گرفتند و وجود تعادل نش را برای آن اثبات نمودند. چن و خیائو [۱۷] یک زنجیره شامل یک تولید کننده و دو خرده‌فروش رقیب در نظر گرفتند که کالاهای غیرفاسدشدنی را به بازار عرضه می‌کردند. سپس با استفاده از رویکرد نظریه بازی‌ها، همکاری و رقابت بین خرده‌فروشان را مقایسه نمودند. نتایج آنها نشان داد که رقابت خرده‌فروشان سود تعادلی آنها را کاهش می‌دهد و منجر به بیشتر شدن اندازه سفارش می‌شود.

مدل‌های رقابتی فوق کالاها را غیرفاسدشدنی در نظر گرفته‌اند. با در نظر گرفتن کالاهای فاسدشدنی، هی و همکاران [۱۸] مساله تعیین قیمت و سیاست موجودی را برای یک زنجیره دو کاناله بررسی کردند که در آن یک تامین‌کننده کالای فاسدشدنی خود را از دو کانال که یکی شامل یک خرده‌فروش مستقل و دیگری فروش مستقیم آنلاین است، به فروش می‌رساند. همچنین در هیچ کدام از کانال‌ها کمبود مجاز نیست. آنها مدل مورد نظر را در دو حالت متمرکز و غیرمتمرکز بررسی کردند و نتیجه گرفتند که حالت غیرمتمرکز نه تنها سود هر دو شرکت را کاهش می‌دهد بلکه ضایعات ناشی از فاسدشدن را نیز بالا می‌برد. ملکی‌تبار و یعقوبی [۱۹] مدل مربوط با هدف تعیین قیمت و سیاست موجودی را برای کالاهای زوال‌پذیر در حال رشد در یک محیط رقابتی دوگانه با فرض مجاز نبودن کمبود، توسعه دادند و مدل خود را برای مطالعه موردی ماهی قرمز به کار بردند. محمودی [۲۰] دو خرده‌فروش رقیب را در نظر گرفتند که کالاهای فاسدشدنی جایگزین به یک بازار مشترک ارائه می‌کردند. آنها مدل تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی را در دو حالت کمبود به صورت پس افت کامل و بدون کمبود بررسی کردند و در هر مورد وجود و یکتایی تعادل نش را اثبات نمودند. در مطالعه ای دیگر محمودی [۲۱] دو زنجیره تامین رقیب با کالاهای فاسد شدنی را در نظر گرفت. سپس یک الگوریتم حل برای ارائه نقاط تعادلی قیمت و سیاست موجودی ارائه داد.

برای تحلیل بهتر ادبیات موضوع، مقالات مرتبط در جدول ۱ دسته‌بندی شده‌اند. همچنان که مشاهده می‌شود مدل قیمت‌گذاری و کنترل موجودی همزمان برای کالاهای فاسدشدنی در محیط رقابتی در ادبیات موضوع به اندازه کافی مورد بررسی قرار نگرفته است. در واقع فقط چهار مقاله در این حوزه ارائه شده‌اند که این مقالات نیز رقابت دوتایی را در نظر گرفته‌اند و

هیچ‌کدام محیط رقابتی با تعداد دلخواه خرده‌فروش را در نظر نگرفته‌اند. در حالی که در محیط‌های رقابتی خرده‌فروشی معمولاً تعداد رقبا بیشتر از دو است. همچنین کمبود جزئی فقط در یک مقاله از این چهار مقاله در نظر گرفته شده است. هدف از پژوهش جاری رفع این کاستی‌ها در ادبیات موضوع است. در مقاله حاضر یک محیط رقابتی با تعدادی دلخواه خرده‌فروش در نظر گرفته می‌شود که یک کالای فاسدشدنی جایگزین به بازار ارائه می‌دهند. همچنین کمبود جزئی با یک نسبت ثابت در نظر گرفته می‌شود. به این معنی که اگر سیستم موجودی دچار کمبود شود قسمتی از تقاضا از دست می‌روند و قسمتی به صورت پس‌افت در دریافت سفارش بعدی تامین می‌شود. سپس مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست موجودی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در مسائلی که چندین تصمیم‌گیر/بازیکن وجود دارد و تصمیمات بازیکن‌ها بر روی دریافت بازیکن‌های دیگر اثر می‌گذارند، استفاده از نظریه بازی‌ها جهت تحلیل رفتار بازیکن‌ها و خروجی بازی مرسوم و مورد قبول است. در واقع، نظریه بازی‌ها یک ابزار ریاضی است که دقیقا برای بررسی چنین مسائلی توسعه داده شده است. در ادبیات موضوع، مقالات متعددی [۲۲, ۲۳] از نظریه بازی‌ها جهت تحلیل رقابت بین خرده‌فروش‌ها و یا رقابت در زنجیره تامین استفاده کرده‌اند. هنگامی که بازیکن‌ها به صورت همزمان تصمیم می‌گیرند، از مفهوم تعادل نش برای پیش‌بینی خروجی یک بازی استفاده می‌شود. تعادل نش شامل یک ترکیب از تصمیمات همه بازیکن‌ها است که در آن هیچ بازیکنی به تنهایی و در حالی که تصمیم بقیه ثابت است نمی‌تواند با تغییر تصمیم خود، دریافت خود را بهبود ببخشد. به عبارت دیگر، تعادل نش محل تقاطع توابع بهترین پاسخ بازیکن‌ها به همدیگر است. با توجه به اینکه در این مقاله خرده‌فروش‌ها به صورت همزمان بر روی قیمت و سیاست موجودی تصمیم‌گیری می‌کنند، از مفهوم تعادل نش جهت پیش‌بینی خروجی بازی استفاده می‌شود.

جدول ۱. دسته‌بندی مقالات مرتبط در ادبیات موضوع

مرجع	سال انتشار	فاسد شدن کالاها		رقابت			کمبود			
		بله	خیر	انحصاری	رقابت دوگانه	رقابت چندگانه	غیر مجاز	پس افت کامل	از دست رفته	پس افت جزئی
[۲]	۱۹۷۷	*		*				*		
[۳]	۲۰۰۷	*		*						*
[۹]	۲۰۱۷	*		*					*	
[۱۰]	۲۰۱۸	*		*				*		
[۱۱]	۲۰۱۸	*		*						*
[۱۲]	۲۰۱۹	*		*						*
[۱۳]	۲۰۲۰	*		*			*			
[۱٤]	۲۰۰٤		*			*		*		
[۱٥]	۲۰۰٥		*			*			*	
[۱٦]	۲۰۱۰		*		*		*			
[۱۷]	۲۰۱۷		*			*	*			
[۱۸]	۲۰۱۸	*			*		*			
[۱۹]	۲۰۱۷	*			*		*			
[۲۰]	۲۰۱۹	*			*			*		
[۲۱]	۲۰۲۰	*			*					*
مقاله حاضر		*				*				*

۳- روش‌شناسی پژوهش

به طور کلی می‌توان گفت که تحقیق در عملیات یا پژوهشی عملیاتی رویکرد علمی برخورد با

مسائل تصمیم‌گیری است. پژوهش حاضر نیز در زیرمجموعه تحقیق در عملیات قرار می‌گیرد و روش انجام آن همان روش معمول مورد استفاده در پژوهش‌های مرتبط با تحقیق در عملیات است. در نتیجه روش‌شناسی این پژوهش را می‌توان به این صورت عنوان کرد که در ابتدا مساله مورد نظر فرموله‌بندی می‌شود. در این قدم تصمیم‌گیران، اهداف ومحدودیت‌های آنها شناسایی و مساله مورد نظر به صورت مدل ریاضی فرموله می‌شود. در قدم بعدی تمرکز بر روی ارائه رویکرد حل مساله قرار می‌گیرد و جوابهای مدل ارائه می‌شوند. سپس مدل مورد نظر و رویکرد حل آن با داده‌های واقعی یا آزمایشی تست می‌شود. در مقاله حاضر هر سه قدم فوق انجام گرفته است. البته با توجه به عدم دسترسی نویسندگان به داده‌های واقعی، مشابه اکثر پژوهش‌های موجود در این حوزه ورودی‌های مدل بر اساس تصور ذهنی نویسندگان از پارامترهای مسائل واقعی به صورت آزمایشی تعیین شده‌اند.

شایان ذکر است که در رویکرد تحقیق در عملیات نتایج حاصله در نهایت اجرا می‌شوند، اما در پژوهش حاضر بنابه محدودیتهای موجود قدم آخر –مشابه اکثر پژوهش‌های موجود– انجام نشده است.

۴- تشریح مدل

در این مقاله تعداد $2 \le n$ خرده‌فروش رقیب در نظر گرفته می‌شود که کالای مشابه و جایگزین را به یک بازار مشترک ارائه می‌دهند. هر خرده فروش به دنبال ماکزیمم کردن سود خود با تعیین قیمت و سیاست موجودی است. تقاضای هر خرده‌فروش وابسته به قیمت‌های خرده‌فروشی ارائه شده در بازار است و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

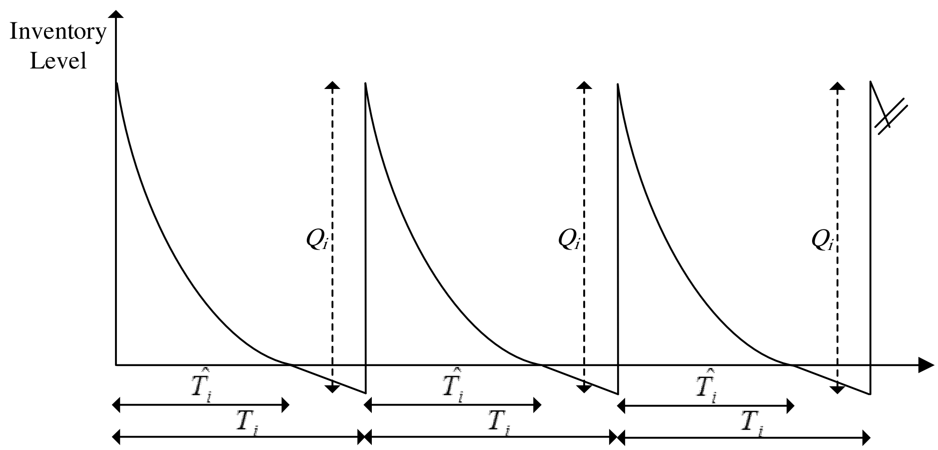
$$d_i(P) = a_i - \beta_i' p_i + \gamma \sum_{j \neq i} (p_j - p_i) \qquad ; i = 1, \ldots, n$$

که با در نظر گرفتن $\beta_i = \beta_i' + (n-1)\gamma \; ; i = 1, \ldots, n$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$d_i(P) = a_i - \beta_i p_i + \gamma \sum_{j \neq i} p_j \qquad ; i = 1, \ldots, n \tag{۱}$$

در این رابطه a_i مقدار بازار پایه سالیانه برای خرده فروش iام است در حالتی که قیمت‌ها مقدار صفر بگیرند. همچنین β_i حساسیت تقاضا نسبت به قیمت خود خرده فروش iام و γ

حساسیت قیمت نسبت به قیمت خرده فروش رقیب است که $0 \le \gamma \le \beta_i$. به دلیل سادگی در نگارش از این به بعد به جای $d_i(P)$ از d_i استفاده می‌شود. تابع تقاضای فوق در مطالعات مرتبط زیادی [۲۰, ۲٤, ۲۵] مورد استفاده قرار گرفته است. هر خرده فروش علاوه بر تعیین قیمت، بر روی زمان بین دو سفارش خود نیز تصمیم می‌گیرد. کالاها فاسد شدنی با طول عمر نمایی و نرخ ثابت فاسد شدن θ_i (برای خرده فروش iام) در نظر گرفته می‌شود. همچنین کمبود به صورت جزئی و با نرخ ثابت δ_i برای خرده فروش iام رخ می‌دهد. این نوع کمبود به این معنی است که زمانی که موجودی خرده‌فروش iام تمام می‌شود، به نسبت δ_i از تقاضا به صورت پس افت است و منتظر دریافت بعدی می‌مانند. اما بقیه تقاضا به صورت فروش ازدست رفته است. اگر سیکل سفارش‌دهی خرده فروش iام برابر T_i در نظرگرفته شود در این صورت سطح موجودی آن مطابق شکل ۱ خواهد بود.



شکل ۱: نمودار سطح موجودی در خرده فروش iام

همانطور که از شکل ۱ قابل مشاهده است از ابتدای هر سیکل تا زمان $\hat{T}_i$ موجودی در دست مثبت است و موجودی با توجه به نرخ فساد و نرخ تقاضا کاهش می‌یابد. در لحظه $\hat{T}_i$ موجودی در دست صفر می‌شود و از لحظه $\hat{T}_i$ تا T_i به مقدار کمبود با نرخ $\delta_i d_i$ اضافه

می‌شود. با فرض اینکه $I_i(t)$ و $B_i(t)$ به ترتیب موجودی در دست و مقدار کمبود برای خرده فروش i در زمان t باشند در این صورت تغییرات سطح موجودی در طول یک سیکل به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial I_i(t)}{\partial t} = -\theta I_i(t) - d_i \quad ; \quad 0 \le t \le \hat{T}_i$$
$$\frac{\partial B_i(t)}{\partial t} = \delta_i d_i \quad ; \quad \hat{T}_i \le t \le T_i$$

با حل معادلات بالا با درنظر گرفتن شرط اولیه $I_i(\hat{T}_i) = B_i(\hat{T}_i) = 0$، تابع موجودی در دسترس و مقدار کمبود خرده‌فروش iام به ترتیب به صورت زیر تعیین می شود.

$$I_i(t) = \begin{cases} \dfrac{d_i}{\theta_i}(e^{\theta_i(\hat{T}_i - t)} - 1) & ; \quad 0 \le t \le \hat{T}_i \\ 0 & ; \quad \hat{T}_i \le t \le T_i \end{cases}$$
$$B_i(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t \le \hat{T}_i \\ \delta_i d_i (t - \hat{T}_i) & ; \quad \hat{T}_i \le t \le T_i \end{cases}$$

مقداری که هر خرده فروش در هر سیکل سفارش می‌دهد باید جوابگوی تقاضا در طول آن سیکل باشد. از طرف دیگر همانطور که بیان شد درصدی از تقاضای مشتریان خرده فروش i ام به صورت کمبود خواهد بود. بنابراین سفارش خرده فروش iام باید به اندازه‌ای باشد که تقاضای طول سیکل و میزان کمبود را بتواند برآورده کند که این مطلب در شکل۱ نشان داده شده است. در این صورت میزان سفارش (Q_i) برابر است با

$$Q_i = I_i(0) + B_i(T_i) = \frac{d_i}{\theta_i}(e^{\theta_i \hat{T}_i} - 1) + \delta_i d_i (T_i - \hat{T}_i) \qquad (۲)$$

در نتیجه مقدار Q_i بعد از تعیین مقادیر $\hat{T}_i$، T_i و قیمت‌های خرده‌فروشی قابل تعیین است.

هر کدام از خرده‌فروش‌ها به دنبال تعیین همزمان قیمت فروش و سیاست موجودی خود با هدف بیشینه کردن سود خود هستند. سیاست موجودی با تعیین مقادیر $\hat{T}_i$، T_i مشخص می‌شود. با توجه به وجود رقابت، سود هر خرده‌فروش علاوه بر وابستگی به تصمیمات خود

به تصمیمات سایر خرده‌فروش‌ها نیز وابسته است. در نتیجه جهت تحلیل مدل باید از مفهوم تعادل نش استفاده شود. یکی از ورودی‌های مساله جهت تعیین تعادل نش، تابع دریافت هر بازیکن است که در این پژوهش معادل تابع سود خرده‌فروش‌هاست. تابع سود هر خرده‌فروش با محاسبه تابع درآمد و توابع هزینه‌ای سیستم موجودی به دست می‌آید.

همه سیکل‌های یک خرده فروش مشابه هستند، بنابراین با فرموله‌کردن هزینه‌های یک سیکل و ضرب آن در تعداد سیکل سالیانه، هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی قابل محاسبه است. هزینه‌های سیستم موجودی هر خرده فروش شامل هزینه‌های ثابت و متغیر سفارش‌دهی، هزینه نگهداری موجودی و هزینه کمبود است که در ادامه فرمول‌بندی می‌شوند.

۴-۱ هزینه‌های ثابت و متغیر سفارش‌دهی

هزینه ثابت سفارش‌دهی، مقداری ثابت به ازای هر بار انجام سفارش است و هزینه متغیر شامل هزینه تامین کالا است. اگر هزینه ثابت هر بار سفارش خرده‌فروش iم را با K_i و هزینه خرید هر واحد کالا آن را با c_i نمایش دهیم. با توجه به وجود $1/T_i$ سیکل در هر سال، هزینه‌های سفارش‌دهی سالیانه (OC_i) به صورت زیر خواهد بود.

$$OC_i = \frac{1}{T_i}(K_i + c_i Q_i) \quad ; i = 1,\dots,n$$

که با جایگذاری مقدار Q_i از رابطه (۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$OC_i = \frac{1}{T_i}\left(K_i + \frac{c_i d_i}{\theta_i}(e^{\theta_i \hat{T}_i} - 1) + c_i \delta_i d_i (T_i - \hat{T}_i)\right) \quad ; i = 1,\dots,n$$

۴-۲ هزینه نگهداری سالیانه

هزینه نگهداری سالیانه (HC_i) از ضرب متوسط موجودی سالیانه در هزینه واحد نگهداری است. اگر نرخ هزینه نگهداری واحد محصول در سال را برابر h_i در نظر بگیریم، آنگاه HC_i به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$HC_i = \frac{h_i}{T_i}\int_0^{T_i} I_i(t)dt = \frac{h_i}{T_i}\frac{d_i}{\theta_i^2}(e^{\theta_i \hat{T}_i} - \theta_i \hat{T}_i - 1) \quad ; i = 1,\dots,n$$

۳-۴ هزینه کمبود سالیانه

این هزینه برابر حاصلضرب متوسط کمبود سالیانه در هزینه واحد کمبود است. اگر هزینه واحد کمبود در سال را با s_i نمایش دهیم، هزینه کمبود سالیانه (SC_i) به صورت زیر خواهد بود.

$$SC_i = \frac{s_i}{T_i}\int_0^{T_i} B_i(t)dt = \frac{s_i \delta_i d_i}{2T_i}(T_i - \hat{T}_i)^2 \qquad ; i = 1,...,n$$

در نهایت درآمد سالیانه خرده فروش iام برابر $p_i d_i$ است و سود سالیانه آن را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد.

$$\Pi_i = p_i d_i - \frac{1}{T_i}\left\{\begin{array}{l} K_i + \dfrac{c_i d_i}{\theta_i}(e^{\theta_i \hat{T}_i} - 1) + c_i \delta_i d_i (T_i - \hat{T}_i) \\ + \dfrac{h_i d_i}{\theta_i^2}(e^{\theta_i \hat{T}_i} - \theta_i \hat{T}_i - 1) + \dfrac{s_i \delta_i d_i}{2}(T_i - \hat{T}_i)^2 \end{array}\right\} \qquad ; i = 1,...,n \qquad (۳)$$

۵- روش حل

وجود عبارت نمایی در تابع سود، بررسی آن را فوق‌العاده سخت می‌کند. برای تبدیل فرمول تابع سود به یک فرمول قابل بررسی مانند اکثر مطالعات موجود در ادبیات [۱, ۲, ۲۰] این حوزه از تقریب بسط تیلور با در نظر گرفتن سه جمله اول یعنی $e^{\theta_i \hat{T}_i} = 1 + \theta_i \hat{T}_i + \frac{\theta_i^2 \hat{T}_i^2}{2}$ استفاده شده است. این تقریب برای مقادیر کوچک $\theta_i \hat{T}_i$، تقریب معتبری به حساب می‌آید. با انجام این تقریب تابع سود هر خرده‌فروش به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\Pi_i \approx\ & (p_i - c_i \delta_i) d_i - \frac{K_i}{T_i} \\ & -(1-\delta_i) c_i d_i \frac{\hat{T}_i}{T_i} - (c_i \theta_i + h_i + s_i \delta_i)\frac{d_i \hat{T}_i^2}{2T_i} - (1 - 2\frac{\hat{T}_i}{T_i})\frac{s_i \delta_i d_i T_i}{2}\end{aligned}$$

با تعریف $\eta_i = \frac{\hat{T}_i}{T_i}$ به عنوان درصدی از هر سیکل که کمبود در آن رخ نمی‌دهد، تابع درآمد فوق به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\Pi_i = (p_i - c_i\delta_i)d_i - \frac{K_i}{T_i} - (1-\delta_i)c_i d_i \eta_i - \frac{1}{2}(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)d_i T_i \eta_i^2 - \frac{1}{2}s_i\delta_i d_i T_i(1-2\eta_i) \tag{٤}$$

در ادامه برای به دست آوردن بهترین تصمیم هر خرده‌فروش با توجه به تصمیمات سایر خرده‌فروش‌ها، در ابتدا قیمت‌های خرده‌فروشی ثابت در نظر گرفته و مقادیر تعادلی η_i و T_i به صورت تابعی از قیمت‌های خرده‌فروشی به دست آورده می‌شود. با جایگذاری این توابع در تابع سود، تابع سود هر خرده‌فروش به صورت تابعی که در آنها فقط متغیرهای قیمت وجود دارند تبدیل می‌شود. در نهایت تعادل نش قیمت‌های خرده‌فروشی بر مبنای توابع سود به دست آمده ارائه می‌شود. سپس مقادیر تعادلی η_i و T_i پس از مشخص شدن قیمت‌های تعادلی محاسبه می‌شوند. لم زیر مقادیر تعادلی η_i و T_i را به صورت تابعی از قیمت‌های خرده‌فروشی ارائه می‌دهد.

لم ۱: با فرض $d_i < K_i(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)\big/\left((1-\delta_i)c_i\right)^2$، به ازای قیمت‌های خرده فروشی ثابت به صورت $P=(p_1,p_2,...,p_n)$، مقادیر η_i و T_i بهینه برای $i=1,2,...,n$ از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\eta_i^* = \frac{1}{\xi_i}\left(s_i\delta_i - \frac{\sqrt{\Psi_i d_i \varphi_i}}{\sqrt{2K_i\xi_i - d_i\Psi_i}}\right) \tag{٥}$$

$$T_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\xi_i - d_i\Psi_i}{d_i\varphi_i}} \tag{٦}$$

که در آن $\Psi_i = \left((1-\delta_i)c_i\right)^2$، $\varphi_i = s_i\delta_i\left(c_i\theta_i + h_i\right)$ و $\xi_i = c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i$.

اثبات: داریم $\frac{\partial^2\Pi_i^s}{\partial\eta_i^2} = -(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)d_i T_i < 0$ بنابراین با ثابت در نظر گرفتن مقدار T_i، تابع Π_i نسبت به η_i مقعر است و می توان از جواب مشتق اول مقدار بهینه η_i بر حسب T_i را به دست آورد.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \eta_i} = -(1-\delta_i)c_i d_i - (c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)d_i T_i \eta_i + s_i \delta_i d_i T_i = 0$$

$$\Rightarrow \eta^*_{i\,(T_i)} = \frac{s_i\delta_i T_i - (1-\delta_i)c_i}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)T_i}$$

حال با جایگذاری $\eta^*_{i\,(T_i)}$ در تابع Π_i داریم.

$$\Pi_i = (p_i - c_i\delta_i)d_i - \frac{K_i}{T_i} - \frac{1}{2}s_i\delta_i d_i T_i$$

$$-\frac{d_i}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)}\left\{-\frac{(s_i\delta_i)^2 T_i}{2} + s_i\delta_i(1-\delta_i)c_i - \frac{((1-\delta_i)c_i)^2}{2T_i}\right\}$$

جهت اثبات مقعر بودن تابع فوق بر حسب T_i، باید $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial T_i^2}$ را بررسی کنیم.

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial T_i^2} = -\frac{K_i}{T_i^3} + \frac{d_i\left((1-\delta_i)c_i\right)^2}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)T_i^3} < 0$$

$$\Leftrightarrow -K_i + \frac{d_i\left((1-\delta_i)c_i\right)^2}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)} < 0 \Leftrightarrow d_i < \frac{K_i(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)}{\left((1-\delta_i)c_i\right)^2}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن فرض موجود در لم، $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial T_i^2}$ منفی است. بنابراین مقدار بهینه T_i از جواب مشتق اول به صورت زیر دست می‌آید.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial T_i} = \frac{K_i}{T_i^2} - \frac{1}{2}s_i\delta_i d_i - \frac{d_i}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)}\left(-\frac{(s_i\delta_i)^2}{2} + \frac{((1-\delta_i)c_i)^2}{2T_i^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\,(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i) - d_i\,((1-\delta_i)c_i)^2}{s_i\delta_i d_i\,(c_i\theta_i + h_i)}} = \sqrt{\frac{2K_i\xi_i - d_i\Psi_i}{d_i\varphi_i}}$$

حال با قرار دادن T_i^* در $\eta^*_{i\,(T_i)}$ مقدار بهینه آن بر حسب پارامترها و قیمتهای خرده‌فروشی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\eta_i^* = \frac{1}{(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)}\left(s_i\delta_i - \frac{(1-\delta_i)c_i\sqrt{s_i\delta_i d_i\,(c_i\theta_i + h_i)}}{\sqrt{2K_i\,(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i) - d_i\,((1-\delta_i)c_i)^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\xi_i}\left(s_i\delta_i - \frac{\sqrt{\Psi_i d_i \varphi_i}}{\sqrt{2K_i\xi_i - d_i\Psi_i}}\right)$$

■

فرض $d_i < K_i(c_i\theta_i + h_i + s_i\delta_i)\big/((1-\delta_i)c_i)^2$ در لم ۱ فرض محدود کننده‌ای نیست و به ازای مقادیر بزرگ K_i و همچنین مقادیر δ_i نزدیک یک قطعا برقرار است. قابل توجه است که مقدار δ_i نشان دهنده نسبت مشتریانی است که در صورت کمبود برای دریافت کالا صبر می‌کنند و همیشه بین صفر و یک است. مقدار $\delta_i = 1$ به معنی پس افت کامل و مقدار $\delta_i = 0$ به معنی فروش از دست رفته کامل است. نکته جالب توجه این است که در حالت $\delta_i = 1$، مقدار η_i^* مستقل از قیمت‌های خرده‌فروشی است و صرفا بر حسب پارامترهای مساله خواهد بود که مشابه نتایج مقالات موجود درادبیات [۲۰] در حالت رقابت دو خرده‌فروش است. به طور کلی، در نظر گرفتن کمبود جزئی باعث تغییرات قابل توجهی در معادلات مربوط به سیاست موجودی شده است. به ویژه، بر اساس مرجع [۲۰]، در نقطه تعادل نش نسبت زمان بدون کمبود در هر سیکل بازپرسازی با فرض عدم کمبود جزئی صرفا تابعی از پارامترهای مدل است و به متغیرهای دیگر مساله بستگی ندارد. در حالی که نتایج پژوهش حاضر نشان می دهد که با در نظر گرفتن کمبود جزئی، مقدار تعادلی نسبت زمان بدون کمبود، مستقل از متغیرهای دیگر نیست و به قیمت و دوره بازپرسازی وابسته است.

با جایگذاری T_i^* و η_i^* در رابطه تابع سود، معادله آن به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\Pi_i = (p_i - c_i\delta_i)d_i - \frac{d_i}{\xi_i}s_i\delta_i(1-\delta_i)c_i - \frac{1}{\xi_i}\sqrt{d_i\varphi_i\left(2K_i\xi_i - d_i\Psi_i\right)}\ ;\ i = 1,2,\ldots n \qquad (۷)$$

قیمت‌های خرده‌فروشی تنها متغیرهای تصمیم موجود در تابع سود فوق هستند. همه خرده‌فروش‌ها تصمیم‌های خود را به صورت همزمان می‌گیرند. در نتیجه جهت پیش‌بینی رفتار آنها باید تعادل نش قیمت‌های خرده‌فروشی را بر اساس تابع دریافت فوق به دست آید. تعادل

نش محل برخورد توابع بهترین پاسخ بازیکن‌هاست و تابع بهترین پاسخ یک بازیکن، بهترین تصمیم او را به صورت تابعی از تصمیمات سایر بازیکن‌ها مشخص می‌کند. تابع بهترین پاسخ یک بازیکن، در صورت مقعر بودن تابع دریافت او از شرط مشتق اول به دست می‌آید. قبل از بررسی روش به دست آوردن تعادل نش باید دو سوال اساسی در مورد آن پاسخ داده شود. اولین سوال در مورد وجود تعادل نش و دومین سوال در مورد یکتایی تعادل نش است. در صورتی که تعادل نش موجود و یکتا باشد پیش‌بینی انجام شده از نتیجه بازی قابل اعتمادتر است. در ادبیات موضوع برای اثبات وجود تعادل نش روش‌های متفاوتی ارائه شده است، که یکی از این روش‌ها استفاده از قضیه زیر است.

قضیه ۱ [٢٦, ٢٧]: اگر سه شرط زیر برای هر بازیکن در یک بازی برقرار باشد، آنگاه بازی مذکور دارای حداقل یک تعادل نش است.

الف) فضای استراتژی یک فضای اقلیدسی با ابعاد محدود غیر تهی، محدب، بسته و کراندار است.

ب) تابع دریافت به عنوان یک تابع چند متغیره بر روی فضای متغیرهای خود پیوسته باشد.

ج) تابع دریافت یک بازیکن با ثابت در نظر گرفتن استراتژی بازیکن‌های دیگر نسبت به متغیر تصمیم خود او مقعر باشد.

اثبات: این قضیه در منبع [٢٦] ثابت شده است. ■

حال از قضیه فوق استفاده کرده و وجود تعادل نش را در بازی بین خرده‌فروشان ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲: با فرض $d_i < \dfrac{K_i \xi_i}{\Psi_i}$، برای $0 \le p_i \le P_i^u = \dfrac{a_i}{\beta_i} - \sqrt[3]{\dfrac{K_i \varphi_i}{4\beta_i \xi_i}}$ که $i = 1, 2, \ldots, n$ بازی تعیین قیمت بین خرده‌فروش‌ها دارای حداقل یک تعادل نش است.

فضای استراتژی خرده‌فروش‌ها شرایط الف و ب قضیه ۱ را دارند و کافی است ثابت شود که تابع دریافت مقعر است. برای این منظور مشتق دوم تابع دریافت در رابطه (۷) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = d_i - (p_i - c_i\delta_i)\beta_i + \frac{\beta_i}{\xi_i} s_i \delta_i (1-\delta_i) c_i + \frac{\beta_i \varphi_i \left(K_i \xi_i - d_i \Psi_i\right)}{\xi_i \sqrt{d_i \varphi_i \left(2K_i \xi_i - d_i \Psi_i\right)}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial {p_i}^2} = -2\beta_i + \frac{{\beta_i}^2 {\varphi_i}^2 {K_i}^2 \xi_i}{\left(d_i \varphi_i \left(2K_i \xi_i - d_i \Psi_i\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

از طرفی

$$-2\beta_i + \frac{{\varphi_i}^{\frac{1}{2}} {\beta_i}^2 {K_i}^2 \xi_i}{\left(2K_i d_i \xi_i - {d_i}^2 \Psi_i\right)^{\frac{3}{2}}} \le 0 \Leftrightarrow {\varphi_i}^{\frac{1}{2}} \beta_i {K_i}^2 \xi_i \le 2\left(2K_i d_i \xi_i - {d_i}^2 \Psi_i\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow {\varphi_i}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta_i {K_i}^2 \xi_i}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \le 2K_i \xi_i d_i - {d_i}^2 \Psi_i \ge \left(2K_i \xi_i d_i - d_i K_i \xi_i\right) = K_i \xi_i d_i$$

آخرین نامساوی با توجه به فرض قضیه $(d_i \Psi_i < K_i \xi_i)$ درست است. همچنین داریم:

$$ {\varphi_i}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta_i {K_i}^2 \xi_i}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \le K_i \xi_i d_i \Leftrightarrow \left(\frac{K_i \varphi_i}{\xi_i}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta_i}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \le d_i \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{{\beta_i}^2 K_i \varphi_i}{4\xi_i}} \le a_i - \beta_i p_i + \gamma \sum_{j=i} p_j \le a_i - \beta_i p_i \Leftrightarrow p_i \le \frac{a_i}{\beta_i} - \sqrt[3]{\frac{K_i \varphi_i}{4\beta_i \xi_i}} \quad \blacksquare$$

نتیجه ۱: با توجه به اثبات مقعر بودن تابع دریافت در قضیه ۲، تحت فرضیات قضیه تابع بهترین پاسخ قیمت هر خرده‌فروش نسبت به تصمیم قیمت سایر خرده‌فروشان از جواب معادله شرط مشتق اول به دست می‌آید.

نتیجه ۲: تحت فرضیات قضیه ۲، مقادیر تعادلی قیمت‌ها از حل دستگاه معادلات متشکل از بهترین پاسخ‌های همه خرده فروش‌ها به صورت زیر، به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0 \;\; ; i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow$$

$$d_i - (p_i - c_i\delta_i)\beta_i + \frac{\beta_i}{\xi_i} s_i \delta_i (1-\delta_i) c_i + \frac{\beta_i \varphi_i \left(K_i \xi_i - d_i \Psi_i\right)}{\xi_i \sqrt{d_i \varphi_i \left(2K_i \xi_i - d_i \Psi_i\right)}} = 0 \qquad (۸)$$

$$; i = 1,2,\ldots,n \quad \text{where } d_i(P) = a_i - \beta_i p_i + \gamma \sum_{j \ne i} p_j \quad .$$

جواب دستگاه معادلات (۸) نقطه تقاطع توابع بهترین پاسخ است، در نتیجه یک نقطه تعادل نش خواهد بود. با توجه به قضیه ۲ دستگاه فوق حداقل یک جواب دارد. علاوه بر وجود تعادل نش، یکتایی آن نیز یک مساله مهم است که نیاز به بررسی دارد.

حدس ۱: نقطه تعادل نش بازی بین خرده‌فروش‌ها یکتا است.

بحث: با توجه به پیچیدگی توابع، اثبات ریاضی یکتا بودن تعادل نش فوق العاده پیچیده است اما در مثال‌های عددی فراوانی که حل شد، جواب‌های به دست آمده یکتا بودند. همچنین یکتایی تعادل نش در مدل ساده‌تر که شامل فقط دو خرده فروش رقیب و بدون کمبود جزئی بوده است در مرجع [۲۰] به اثبات رسیده است. بنابراین حدس ۱ بدون اثبات ریاضی و صرفا بر مبنای نتایج عددی و اثبات ریاضی مدلهای ساده‌تر نوشته شده است. ■

جواب دستگاه معادلات (۸) را می‌توان با روش‌های عددی و استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی به دست آورد. بنابراین رویه حل مدل به صورت زیر خواهد بود.

۱- مقادیر تعادلی p_i ها برای $i = 1, 2, ..., n$ از حل دستگاه معادلات (۸) به دست می‌آید.

۲- با جایگذاری p_i ها مقادیر تعادلی T_i^* و $\widehat{T}_i^*$ از روابط (۵)، (٦) و $\widehat{T}_i^* = \eta_i^* \times T_i^*$ محاسبه می‌شود.

٤- سود هر خرده فروش در نقطه تعادل از رابطه (۳) محاسبه می‌شود.

۶- نتایج عددی

در این بخش، رابطه بین پارامترهای مختلف مدل و خروجی‌های آن با استفاده از آزمایشات عددی بررسی شده است. بدین منظور یک بازار با ۳ خرده‌فروش رقیب با مقادیر پارامترهای زیر به عنوان مثال پایه در نظر گرفته شده است.

$$a = [600,500,400],\ \beta' = [1,1,1],\ c = [10,10,10],\ h = [2,2,2], \theta = [0.03,0.03,0.03],$$
$$K = [120,120,120],\ s = [5,5,5],\ \delta = [0.9,0.9,0.9], \gamma = 0.6$$

با توجه به در نظر گرفتن رقابت در خرده‌فروش‌ها اولین پارامتری که علاقه‌مند به بررسی تاثیر آن با استفاده از نتایج عددی هستیم، پارامتر مربوط به شدت رقابت یعنی γ است. در جدول ۲ مقادیر تعادلی به دست آمده برای مثال پایه و به ازای مقادیر متفاوت γ ارائه شده

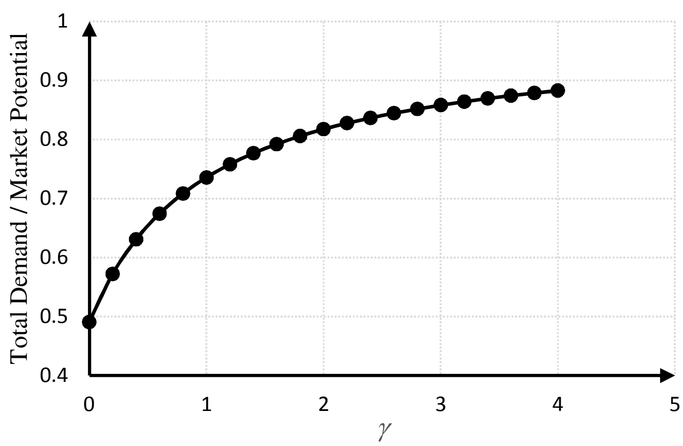
است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش شدت رقابت، قیمت خرده‌فروشی کم می‌شود که از نظر شهودی نیز مورد انتظار است. از طرف دیگر کاهش قیمت باعث جذب تقاضای بیشتر از بازار است. در نتیجه با افزایش شدت رقابت، تقاضای بیشتری از بازار توسط هر خرده‌فروش پاسخ داده می‌شود. با این حال در خرده فروش با پتانسیل بازار بیشتر، اثر افزایش تقاضا بر روی سود مغلوب اثر کاهش قیمت بر روی سود او شده است و در نتیجه سود به دست آمده برای خرده فروش با a_i بزرگتر نسبت به شدت رقابت کاهشی است. اما در خرده‌فروش کوچکتر اثر افزایش تقاضا در ابتدا بر اثر کاهش قیمت غالب است و سپس مغلوب می‌شود. بنابراین سود او با افزایش شدت رقابت در ابتدا افزایشی و سپس کاهشی است. همچنین در حالی که مجموع تقاضای برآورد شده توسط سه خرده‌فروش بیشتر می‌شود، مجموع سود آنها کاهش می‌یابد. به علاوه با افزایش شدت رقابت، سیکل سفارش‌دهی همه خرده‌فروش‌ها کم می‌شود که این اتفاق با توجه به افزایش تقاضای آنها، قابل توجیه است. همچنین در هر سه خرده‌فروش، شدت کاهش $\widehat{T}_i^*$ بیشتر از شدت کاهش T_i^* است، که به این معنی است که با افزایش شدت رقابت در نرخ پس افت ۰٫۹، خرده‌فروش‌ها تمایل بیشتری به کمبود و براورد تقاضا به صورت پس‌افت دارند.

جدول ۲. اثر شدت رقابت بر نتایج تعادلی خرده‌فروش‌ها

γ	p_1^*	p_2^*	p_3^*	T_1^*	$\widehat{T}_1^*$	T_2^*	$\widehat{T}_2^*$	T_3^*	$\widehat{T}_3^*$	Π_1	Π_2	Π_3	d_1	d_2	d_3
۰	۳۰۴.۸	۲۵۴.۸	۲۰۴.۸	۰.۶۶۲	۰.۲۹۱	۰.۷۳۹	۰.۳۴۲	۰.۸۴۳	۰.۴۱۱	۸۶۸۲۷.۵	۵۹۸۳۱.۹	۳۷۸۴۰.۳	۲۹۵.۲	۲۴۵.۲	۱۹۵.۲
۰.۲	۲۴۷.۳	۲۱۴	۱۸۰.۶	۰.۶۱۴	۰.۲۵۹	۰.۶۷۴	۰.۲۹۹	۰.۷۵	۰.۳۴۹	۷۸۷۵۱.۳	۵۸۱۴۴.۵	۴۰۶۵۱.۸	۳۳۲.۷	۲۸۶	۲۳۹.۴
۰.۴	۲۰۹.۸	۱۸۴.۸	۱۵۹.۸	۰.۵۸۴	۰.۲۳۹	۰.۶۳۵	۰.۲۷۳	۰.۶۹۸	۰.۳۱۵	۷۱۷۶۶.۶	۵۴۸۹۶.۲	۴۰۲۷۸.۱	۳۶۰.۲	۳۱۵.۲	۲۷۰.۲
۰.۶	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۶۰۹	۰.۲۵۶	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۹۲.۷	۵۱۳۴۲.۵	۳۸۷۵۴.۴	۳۸۱.۱	۳۳۷.۱	۲۹۳.۱
۰.۸	۱۶۲.۵	۱۴۵.۹	۱۲۹.۲	۰.۵۴۸	۰.۲۱۵	۰.۵۹	۰.۲۴۴	۰.۶۴۱	۰.۲۷۷	۶۰۴۲۹.۹	۴۷۹۱۶.۳	۳۶۸۴۹.۲	۳۹۷.۵	۳۵۴.۱	۳۱۰.۸
۱	۱۴۶.۵	۱۳۲.۲	۱۱۸	۰.۵۳۶	۰.۲۰۸	۰.۵۷۶	۰.۲۳۴	۰.۶۲۳	۰.۲۶۶	۵۵۸۶۵.۲	۴۴۷۵۸.۲	۳۴۸۷۷.۵	۴۱۰.۶	۳۶۷.۸	۳۲۴.۹
۱.۲	۱۳۳.۶	۱۲۱.۱	۱۰۸.۶	۰.۵۲۷	۰.۲۰۲	۰.۵۶۵	۰.۲۲۷	۰.۶۱	۰.۲۵۷	۵۱۸۹۰.۲	۴۱۸۹۸.۴	۳۲۹۷۰.۹	۴۲۱.۴	۳۷۸.۹	۳۳۶.۴

همانطور که از جدول ۲ قابل برداشت است با افزایش شدت رقابت، مجموع تقاضای برآورد شده افزایش می‌یابد. نحوه و حد نهایی افزایش این تقاضا می‌تواند از دید تنظیم کننده بازار جالب توجه باشد. به همین منظور نسبت کل تقاضای برآورد شده بر کل پتانسیل بازار در

مقابل شدت رقابت در شکل ۲ به تصویر کشیده شده است. پتانسیل بازار برابر کل تقاضای بازار در حالتی است که قیمت‌های خرده‌فروشی برابر صفر شوند و از جمع a_iها به دست می‌آید. بر اساس شکل ۲ می‌توان گفت شدت افزایش تقاضا در ابتدا زیاد بوده و در γهای بزرگتر بر شدت افزایش تقاضا کاسته می‌شود. همچنین اگر γ به سمت بینهایت میل کند مجموع تقاضای برآورد شده به سمت کل پتانسیل بازار میل می‌کند. از طرف دیگر اگر γ به سمت بینهایت میل کند، باید قیمت‌های تعادلی بر اساس مدل کلاسیک برتراند[1] به سمت هزینه‌های حاشیه‌ای میل کنند که با نتیجه گرفته شده از شکل ۱ هماهنگی دارد.



شکل ۲: نمودار نسبت کل تقاضای برآورد شده بر کل پتانسیل بازار در مقابل شدت رقابت

با توجه به در نظر گرفتن کالاهای فاسد شدنی، تحلیل اثر پارامتر نرخ فاسد شدن می‌تواند قابل ملاحظه باشد به همین منظور این پارامتر را برای خرده فروش دوم تغییر داده و در خرده‌فروش‌های دیگر ثابت در نظر گرفته می‌شود. نتایج عددی به دست آمده برای مثال پایه در جدول ۳ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که تغییر نرخ فاسد شدن خرده فروش مذکور تغییر زیادی بر روی قیمت خرده‌فروشی او ندارد. دلیل این امر رقابت موجود در بازار است. زیرا

افزایش نرخ فاسد شدن به معنی افزایش هزینه یک کالای فروخته شده است و طبیعی است که در حالت انحصاری این امر افزایش قیمت را در پی داشته باشد. اما در بازار رقابتی افزایش قیمت منجر به انتقال مشتریان خرده‌فروش به خرده فروش رقیب و کاهش سود او شده است. به همین دلیل خرده فروش دوم حتی‌الامکان از افزایش قیمت تعادلی خود اجتناب می‌کند. اما با تغییر سیاست کنترل موجودی سعی در کاهش اثر آن دارد و به همین دلیل دوره سفارش‌دهی خرده‌فروش دوم در جدول ۳ با افزایش نرخ فاسد شدن او کاهش پیدا کرده است.

جدول ۳. اثر تغییر نرخ فاسد شدن خرده‌فروش دوم بر نتایج تعادلی

θ_2	p_1^*	p_2^*	p_3^*	T_1^*	$\widehat{T}_1^*$	T_2^*	$\widehat{T}_2^*$	T_3^*	$\widehat{T}_3^*$	Π_1	Π_2	Π_3	d_1	d_2	d_3
۰.۰۱	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۶۲۶	۰.۲۷۵	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۹۴	۵۱۳۴۶.۷	۳۸۷۵۵.۴	۳۸۱.۱	۳۳۷.۱	۲۹۳.۱
۰.۰۳	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۶۰۹	۰.۲۵۶	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۹۲.۷	۵۱۳۴۲.۵	۳۸۷۵۴.۴	۳۸۱.۱	۳۳۷.۱	۲۹۳.۱
۰.۰۵	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۵۹۵	۰.۲۴	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۹۱.۵	۵۱۳۳۸.۷	۳۸۷۵۳.۵	۳۸۱.۱	۳۳۷.۱	۲۹۳.۱
۰.۰۷	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۵۸۳	۰.۲۲۵	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۹۰.۴	۵۱۳۳۵.۳	۳۸۷۵۲.۶	۳۸۱.۱	۳۳۷.۱	۲۹۳.۱
۰.۰۹	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۵۷۲	۰.۲۱۳	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۸۹.۴	۵۱۳۳۲.۲	۳۸۷۵۱.۸	۳۸۱.۱	۳۳۷.۲	۲۹۳.۱
۰.۱۱	۱۸۲.۹	۱۶۲.۹	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۵۶۲	۰.۲۰۱	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۸۸.۴	۵۱۳۲۹.۴	۳۸۷۵۱	۳۸۱.۱	۳۳۷.۲	۲۹۳.۱
۰.۱۳	۱۸۲.۹	۱۶۲.۸	۱۴۲.۹	۰.۵۶۳	۰.۲۲۶	۰.۵۵۴	۰.۱۹۱	۰.۶۶۴	۰.۲۹۳	۶۵۶۸۷.۴	۵۱۳۲۶.۸	۳۸۷۵۰.۳	۳۸۱.۱	۳۳۷.۲	۲۹۳.۱

در نهایت، اثر پارامتر δ_i که نسبت پس‌افت را نشان می‌دهد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همه پارامترها مشابه مثال پایه در نظر گرفته شده است و پارامتر δ_2 تغییر داده می‌شود. نتایج تعادلی در جدول ۴ ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که تاثیر این پارامتر بر قیمت‌های تعادلی قابل توجه نیست و فقط قیمت تعادلی خود خرده فروش دوم مقدار کمی افزایش یافته است. حال آنکه زمان بازپرسازی خرده فروش دوم با افزایش δ_2، افزایش یافته است. نتیجه جالب توجه تاثیر توابع سود از تغییرات δ_2 است، به طوری که با افزایش δ_2 سود خرده‌فروش دوم کاهش یافته و سود رقبای او افزایش می‌یابد.

جدول ۴. اثر تغییر نرخ پس‌افت خرده‌فروش دوم بر نتایج تعادلی

δ_2	p_1^*	p_2^*	p_3^*	T_1^*	$\widehat{T}_1^*$	T_2^*	$\widehat{T}_2^*$	T_3^*	$\widehat{T}_3^*$	Π_1	Π_2	Π_3	d_1	d_2	d_3
۰.۸٤	۱۸۲.۹	۱٦۲.۸	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٤٦۲	۰.۰٥۳	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥٦۷۸.٤	٥۱٤۹٦.۸	۳۸۷٤۳.٤	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۸٦	۱۸۲.۹	۱٦۲.۸	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٥۲٦	۰.۱۳۱	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥٦۸۳.۳	٥۱٤۳۷.٥	۳۸۷٤۷.۲	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۸۸	۱۸۲.۹	۱٦۲.۹	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٥۷٤	۰.۱۹۸	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥٦۸۸.۱	٥۱۳۸٦.۸	۳۸۷٥۰.۸	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۹	۱۸۲.۹	۱٦۲.۹	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٦۰۹	۰.۲٥٦	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥٦۹۲.۷	٥۱۳٤۲.٥	۳۸۷٥٤.٤	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۹۲	۱۸۲.۹	۱٦۲.۹	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٦۳٦	۰.۳۰۸	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥٦۹۷.۲	٥۱۳۰۳.٥	۳۸۷٥۷.۸	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۹٤	۱۸۲.۹	۱٦۳	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٦٥٤	۰.۳٥٤	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥۷۰۱.٦	٥۱۲٦۹.۱	۳۸۷٦۱.۲	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳
۰.۹٦	۱۸۲.۹	۱٦۳	۱٤۲.۹	۰.٥٦۳	۰.۲۲٦	۰.٦٦٦	۰.۳۹٤	۰.٦٦٤	۰.۲۹۳	٦٥۷۰٥.۸	٥۱۲۳۸.۸	۳۸۷٦٤.٥	۳۸۱	۳۳۷	۲۹۳

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل رقابت چندگانه خرده‌فروشان، که یک کالای فاسد شدنی را به یک بازار مشترک ارائه می‌دهند،در نظر گرفته شده است. سپس مساله تعیین همزمان قیمت و سیاست کنترل موجودی توسط هر خرده فروش با استفاده از تکنیک‌های تحقیق در عملیات و به طور خاص مفاهیم نظریه بازی‌ها مورد تحلیل قرار گرفت. برای این منظور، در ابتدا تابع سود هر خرده‌فروش ارائه گردید و به دلیل پیچیدگی موجود در آن با استفاده از تقریب تیلور به یک تابع خوش‌فرم‌تر تقریب زده شده است. با توجه به وجود رقابت همزمان در خرده‌فروش‌ها، جواب مساله باید یک نقطه تعادل نش باشد. به همین دلیل وجود جواب تعادل نش برای مساله اثبات شد. همچنین یکتایی این جواب مورد بحث قرار گرفت. در نهایت یک رویه حل برای تعیین تصمیم‌های تعادلی خرده‌فروش‌ها ارائه گردید.

تحلیل‌های ریاضی نشان دادند که در نظر گرفتن کمبود جزئی باعث تغییرات قابل توجهی در معادلات مربوط به سیاست موجودی می‌شود. به ویژه، بر اساس مقالات موجود در ادبیات، در نقطه تعادل نش نسبت زمان بدون کمبود در هر سیکل بازپرسازی با فرض عدم کمبود جزئی صرفا تابعی از پارامترهای مدل است و به متغیرهای دیگر مساله بستگی ندارد. در حالی که نتایج پژوهش حاضر نشان دادند که با در نظر گرفتن کمبود جزئی، مقدار تعادلی نسبت زمان بدون کمبود مستقل از متغیرهای دیگر نیست و به قیمت و دوره بازپرسازی وابسته است.

در نهایت تحلیل عددی به منظور بررسی تاثیر پارامترهای مهم مدل بر روی نتایج تعادلی

انجام گردید. بر اساس نتایج عددی می‌توان گفت که افزایش شدت رقابت، به نفع مشتریان بوده و قیمت‌های خرده‌فروشی با افزایش رقابت کمتر خواهند شد و در مقابل تقاضای بیشتری از مشتریان برآورده می‌شود. همچنین در خرده فروش با پتانسیل بازار بیشتر، افزایش شدت رقابت منجر به کاهش سود می‌شود. در حالی‌که در خرده‌فروش کوچکتر، مقدار سود با افزایش شدت رقابت در ابتدا افزایشی و سپس کاهشی است. به علاوه، با اینکه مجموع تقاضای برآورد شده توسط سه خرده‌فروش بیشتر می‌شود، مجموع سود آنها کاهش می‌یابد. در نهایت، با افزایش شدت رقابت، سیکل سفارش‌دهی همه خرده‌فروش‌ها کم می‌شود.

نتایج عددی نشان دادند که بر خلاف مدل‌های انحصاری، تغییر نرخ فاسد شدن یک خرده‌فروش در مدل رقابتی تغییر زیادی بر روی قیمت خرده‌فروشی او ندارد. زیرا در بازار رقابتی افزایش قیمت منجر به انتقال مشتریان خرده‌فروش به خرده‌فروش رقیب و کاهش سود او می‌شود. در مقابل خرده‌فروش با تغییر سیاست کنترل موجودی سعی در کاهش اثر افزایش نرخ فساد دارد به همین دلیل دوره سفارش‌دهی خود را کاهش می‌دهد. نتیجه قابل توجه دیگر تاثیر نسبت کمبود جزئی بر روی نقاط تعادلی است، به طوری که با افزایش نرخ پس‌افت یک خرده‌فروش، سود او کاهش یافته و سود رقبای او افزایش می‌یابد.

مدل مورد نظر این پژوهش تصمیمات را در حالت ایستا در نظر گرفته است. در نظر گرفتن مدل پویا از لحاظ عملی و به دلیل تغییرات دائمی فضای کسب و کار می‌تواند یک جهت جذاب برای تحقیقات آتی باشد. به علاوه، تقاضای غیرقطعی شرایط واقعی کسب و کار را بهتر به تصویر می‌کشد. در حالی که در این تحقیق از تقاضای قطعی وابسته به قیمت استفاده شده است. در نظر گرفتن عدم قطعیت تقاضا مدل را فوق‌العاده پیچیده کرده و بررسی آن می‌تواند یکی از جهت‌های چالشی برای تحقیقات آتی باشد. در نهایت، علاوه بر قیمت پارامترهای دیگری مانند کیفیت می‌تواند به عنوان فاکتورهای رقابتی در نظر گرفته شوند که اضافه کردن آنها به مدل جهت پیشنهادی دیگری برای پژوهش‌های آتی است.

۸- پی‌نوشت‌ها

1. Nash Equilibrium
2. Bertrand

۹- مراجع

[1] A. Mahmoodi, Stackelberg-Equilibrium of Pricing and Inventory Decisions in a Supply Chain, in: 2019 15th Iran International Industrial Engineering Conference (IIIEC), IEEE, 2019, pp. 14-17.

[2] M.A. Cohen, Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand, Naval Research Logistics, 24 (1977) 257-268.

[3] C.-Y. Dye, Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging, Omega, 35 (2007) 184-189.

[4] Z. Chen, Joint decision of inventory and pricing for deteriorating items with partial backlogging and multi-constraint, International Journal of Modelling in Operations Management, 3 (2013) 184-205.

[5] S. Panda, S. Saha, M. Basu, Optimal pricing and lot-sizing for perishable inventory with price and time dependent ramp-type demand, International Journal of Systems Science, 44 (2013) 127-138.

[6] P. Chintapalli, Simultaneous pricing and inventory management of deteriorating perishable products, Annals of Operations Research, 229 (201۵) ۲۸۷-۳۰۱.

[7] M.R. Gholamian, H. Zamani Bajegani, An inventory control model for obsolete items with consideration of all unit quantity discount and price-dependent on order quantity, Modern Research in Decision Making, 4 (2019) 127-146. (in persian)

[8] L. Feng, J .Zhang, W. Tang, Optimal inventory control and pricing of perishable items without shortages, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 13 (2016) 918-931.

[9] G.A. Chua, R. Mokhlesi, A. Sainathan, Optimal discounting and replenishment policies for perishable products, International Journal of Production Economics, 186 (2017) 8-20.

[10] F. Lu, H. Xu, P. Chen, S.X. Zhu, Joint pricing and production decisions with

yield uncertainty and downconversion, International Journal of Production Economics, 197 (2018) 52-62.

[11] S. Tiwari, C.K. Jaggi, M. Gupta, L.E. Cárdenas-Barrón, Optimal pricing and lot-sizing policy for supply chain system with deteriorating items under limited storage capacity, International Journal of Production Economics, 200 (2018)278-290.

[12] C.N. Rapolu, D.H. Kandpal, Joint pricing, advertisement, preservation technology investment and inventory policies for non-instantaneous deteriorating items under trade credit, OPSEARCH, (2019) 1-27.

[13] M.A. Agi, H.N. Soni, Joint pricing and inventory decisions for perishable products with age-, stock-, and price-dependent demand rate, Journal of the Operational Research Society, 71 (2020) 85-99.

[14] F. Bernstein, A. Federgruen, Dynamic inventory and pricing models for competing retailers, Naval Research Logistics (NRL), 51 (2004) 258-274.

[15] F. Bernstein, A. Federgruen, Decentralized supply chains with competing retailers under demand uncertainty, Management Science, 51 (2005) 18-29.

[16] E. Adida, G. Perakis, Dynamic pricing and inventory control: Uncertainty and competition, Operations Research, 58 (2010) 289-302.

[17] K. Chen, T. Xiao, Pricing and replenishment policies in a supply chain with competing retailers under different retail behaviors, Computers & Industrial Engineering, 103 (2017) 145-157.

[18] Y. He, H. Huang, D. Li, Inventory and pricing decisions for a dual-channel supply chain with deteriorating products, Operational Research, (2018) 1-43.

[19] M. Malekitabar, S. Yaghoubi, A two-stage pricing and inventory optimization model for both ameliorating and deteriorating items in a competing environment, Journal of Industrial and Systems Engineering, 10 (2017) 50-71.

[20] A. Mahmoodi, Joint pricing and inventory control of duopoly retailers with deteriorating items and linear demand, Computers & Industrial Engineering, 132

(2019) 36-46.

[21] A. Mahmoodi, Stackelberg–Nash equilibrium of pricing and inventory decisions in duopoly supply chains using a nested evolutionary algorithm, Applied Soft Computing, 86 (2020) 105922.

[22] H.R. Akbarfakhrabadi, J. Gheidar-Kheljani, S.H. Ghodsypour, Competition modeling in coordinating a three level supply chain, Modern Research in Decision Making, 1 (2016) 1-22. (in persian)

[23] J. Behnamian, M.M. Bashar, Multi-stage modeling for non-cooperative multi-echelon supply chain management problem with discount under uncertainty, Modern Research in Decision Making, 2 (2017) 49-75. (in persian)

[24] E.J. Anderson, Y. Bao, Price competition with integrated and decentralized supply chains, European Journal of Operational Research, 200 (2010) 227-234.

[25] A. Mahmoodi, K. Eshghi, Price competition in duopoly supply chains with stochastic demand, Journal of Manufacturing Systems, 33 (2014) 604-612.

[26] H. Nikaidô, K. Isoda, Note on non-cooperative convex games, Pacific Journal of Mathematics, 5 (1955) 807-815.

[27] A. Matsumoto, F. Szidarovszky, Game theory and its applications, Springer, 2016.