



پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری

دوره ۵، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹، صص ۳۰-۵۱

## مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی فازی تحت تابع زیان نامتقارن لینکس

مرتضی نظری<sup>۱</sup>، جعفر فتحعلی<sup>۲</sup>، نعمت اله تقی نژاد<sup>۳\*</sup>

۱- دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

۲- دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

۳- استادیار، گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبد، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

تاریخ ارسال: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰

### چکیده

در این مقاله به مسئله مکان‌یابی آرمانی با وزن‌های فازی و تحت تابع زیان نامتقارن لینکس پرداخته‌ایم تا توانسته باشیم مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در مدل ارائه‌شده بررسی نماییم. هدف این مسئله تعیین مکان یک سرویس‌دهنده در شعاع آرمانی (فاصله دقیقاً مشخصی) تا هر یک از نقاط تقاضا است. در حالت کلی، چنین جوابی همواره موجود نیست. بنابراین کمینه کردن تابع خطای حاصل از فاصله سرویس‌دهنده تا نقطه ایده‌آل مطلوب است. از آنجایی که در بسیاری از موقعیت‌های زندگی واقعی، خطای مثبت و خطای منفی با اندازه‌های یکسان، اغلب مفاهیم متفاوت اقتصادی و مادی دارند، بدین منظور برای اولین بار از تابع زیان نامتقارن لینکس استفاده شده است که بین خطاهای مثبت و منفی با فاصله یکسان تمایز قائل می‌باشد. این مسئله ابتدا در حالت قطعی مورد بررسی قرار گرفته و با اثبات یک قضیه نشان داده می‌شود که مسئله دارای جواب شدنی است و جواب بهینه مسئله در پوسته گسترش‌یافته مستطیلی نقاط تقاضا قرار دارد. در ادامه برای تعیین جواب بهینه مسئله، یک الگوریتم گرادیانی شبه-وایزفیلد ارائه شده و با بیان چند قضیه نشان داده می‌شود که این الگوریتم به جواب بهینه مسئله همگرا است. همچنین برای تأیید صحت نتایج به دست آمده از این روش، جواب‌های به دست آمده را با الگوریتم فرا ابتکاری رقابت استعماری نیز مقایسه شده است. در پایان، برای اولین بار مسئله در حالت فازی مدل‌بندی ریاضی شده و جواب‌های آن به کمک الگوریتم ژنتیک سه هدفه با مدل قطعی در قالب یک مثال مقایسه و تحلیل شده است.

**کلمات کلیدی:** مکان‌یابی آرمانی فازی، تک‌وسيله‌ای، تابع زیان لینکس، الگوریتم فرا ابتکاری.



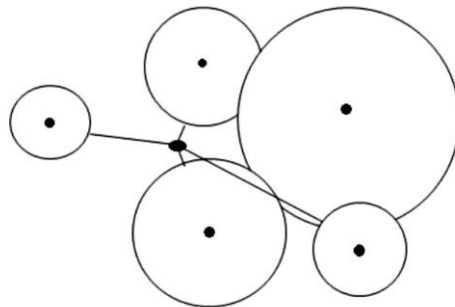
## ۱- مقدمه

امروزه مسائل مکان‌یابی کلاسیک به این صورت شناخته می‌شوند که مجموعه‌ای از نقاط، مکان مشتریان هستند و هدف پیدا کردن بهترین مکان برای یک یا چندین سرویس‌دهنده است؛ به نحوی که با توجه به شرایط موجود به بهترین شکل به مشتریان سرویس‌دهی شود [۱]. مکان‌یابی تسهیلات و تأسیسات از کاربردی‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی است که در بسیاری از شاخه‌های علوم گسترده شده است. از جمله این شاخه‌ها می‌توان به تحقیق در عملیات، علوم مدیریت، مهندسی صنایع، جغرافیا و دیگر شاخه‌های مرتبط اشاره کرد. مکان‌یابی یک فعالیت اعم از یک بنگاه خرده‌فروشی، کارخانه، مرکز خدماتی و غیره، از مهم‌ترین پرسش‌های پیشروی یک فعالیت اقتصادی است تا آنجا که این مسئله می‌تواند تأثیرات به‌سزایی در موفقیت یا شکست آن فعالیت داشته باشد [۲].

در طول دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیار زیادی برای ایجاد مدل‌های مکان‌یابی‌ای که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند، انجام گرفته است. سرویس‌دهی به مراکزی که در عین حال می‌خواهیم به دلیل تأمین خدمات و تقاضای مشتریان به آن‌ها نزدیک باشیم، ولی به دلیل آثار نامطلوبی که دارند (تشعشعات هسته‌ای، آلودگی صدا و غیره) باید در فاصله مشخصی به سرویس‌دهی آن‌ها بپردازیم، از این دسته مسائل هستند. مکان‌یابی چنین سرویس‌دهندگانی که هم دارای تأثیرات مثبت و هم تأثیرات منفی بر روی مشتریان هستند، مکان‌یابی آرمانی نام‌گذاری شده است. بسیاری از مسائل در دنیای پیرامون ما وجود دارند که با استفاده از مکان‌یابی آرمانی به صورت ریاضی مدل می‌شوند. به عنوان یک مثال عینی فرض کنید می‌خواهیم یک فروشگاه (پالایشگاه، مراکز پسماند زباله و غیره) را در یک شهر احداث کنیم، با توجه به ساختار زندگی شهری، نحوه و توزیع جمعیت، هرچه این فروشگاه به مرکز شهر و مناطق پرجمعیت نزدیک‌تر باشد، تقاضای مشتریان به خوبی برآورده می‌شود و از طرف دیگر احداث این مرکز در چنین جایگاه‌هایی هزینه‌های زیادی (خرید زمین و مالیات و غیره) در پی دارد، آلودگی صوتی و ترافیک ناشی از آن، تردد را دچار مشکل می‌کند که همگی از جمله آثار نامطلوب نزدیکی این مرکز خدماتی به مرکز شهر است. برای مدل‌سازی این مسائل، یک کران مشترک (شعاع آرمانی) برای دوری و نزدیکی از مرکز شهر در نظر گرفته می‌شود که این



کران مشترک، معیاری برای جلب رضایت مشتریان و مدیران است. لذا با تعیین یک کران مشخص برای فاصله از مرکز شهر، مسئله با هدف کمترین مجموع خطای فاصله از کران های مذکور مدل می شود. در حقیقت، میزان خطای دوری از این کران کمینه می شود. نمایش شماتیک مسئله برای پنج نقطه تقاضا و برای شعاع های گوناگون در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. نمای شماتیک مسئله مکان یابی آرمانی

همچنین باید توجه داشت که در دنیای واقعی به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت، در بیشتر مواقع یافتن مقادیر دقیق و معین برای پارامترهای مسئله امری غیرممکن می باشد. از این رو می توان از نظریه قدرتمند مجموعه های فازی برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت های موجود، به صورت ریاضی بهره گرفت. بنابراین با توجه به اهمیت موضوع و وجود بسیاری از مسائل در دنیای واقعی که با استفاده از مفهوم مکان یابی آرمانی به صورت ریاضی مدل می شوند و همچنین عدم قطعیت موجود در برآورد پارامترهای مسائل مکان یابی در دنیای واقعی، در این مقاله برای اولین بار به بررسی یک مسئله مکان یابی تک وسیله ای آرمانی فازی پرداخته شده است.

این مقاله در شش بخش تهیه شده است. در بخش بعدی به پیشینه تحقیق پرداخته شده است. در بخش سوم برخی تعاریف اولیه توابع زیان و مفاهیم نظریه مجموعه های فازی بیان شده است. در بخش چهارم، مسئله آرمانی تک وسیله ای را با در نظر گرفتن تابع زیان نامتقارن لینکس، به صورت ریاضی مدل بندی نموده و همچنین به معرفی مسئله مکان یابی تک وسیله ای آرمانی با وزن های فازی تحت تابع زیان لینکس بیان شده، پرداخته ایم. در بخش پنجم، با ارائه چندین قضیه،



وجود جواب برای مدل‌های پیشنهادی‌مان را اثبات و همچنین دو الگوریتم شبه-وایزفیلد<sup>۱۰</sup> (LWA) و الگوریتم فرا ابتکاری رقابت استعماری<sup>۱۱</sup> (ICA) را برای حل مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی تحت تابع زیان لینکس معرفی کرده‌ایم. در بخش انتهایی نیز، به ارائه بررسی و تحلیل مثال‌های عددی حاصل از حل مدل‌های ارائه‌شده در بخش چهارم و پنجم می‌پردازیم.

## ۲- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

نظریه مکان‌یابی به شکلی که امروزه مورداستفاده قرار می‌گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر در سال ۱۹۰۹ تحت عنوان "در مورد مکان صنایع" متولد شد [۳]. وبر در این کتاب نتایج تحقیقات خود را در مورد صنایع کارخانه‌ای ارائه کرد. نمونه‌های گوناگون از مسئله مکان‌یابی وبر را می‌توان در مراجع [۴، ۵، ۶، ۷] مشاهده نمود. پس از آن‌ها مسائل مکان‌یابی به شکل گسترده و با مدل‌های متفاوت موردتوجه محققان قرار گرفت و در این میان مسائل مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای که مشهور به مسائل فرما-وبر می‌باشند، از اساسی‌ترین مسائل نظریه مکان‌یابی هستند. در این مسائل هدف پیدا کردن یک مکان بهینه (سرویس‌دهنده) می‌باشد به نحوی که فاصله وزنی این مکان جدید تا نقاط تقاضا کمینه گردد. در سال ۱۹۳۷، الگوریتم مشهوری برای حل مسئله فرما-وبر به نام الگوریتم وایزفیلد ارائه شد [۸]. پس از ارائه این الگوریتم توسط وایزفیلد محققان بسیاری از این روش برای حل مسائل مکان‌یابی خود تحت عنوان روش‌های شبه-وایزفیلد استفاده نمودند. به‌طور مثال میهل، در سال ۱۹۵۸ روش وایزفیلد را برای مسائل مکان‌یابی چندوسیله‌ای با نرم اقلیدسی گسترش داد [۹]. لایجن و بن اسرائیل، در سال ۲۰۱۰ الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل تخصیص مورداستفاده قرار دادند [۱۰]. همچنین فتحعلی در سال ۲۰۱۴ با ارائه یک الگوریتم شبه-وایزفیلد، مسئله مکان‌یابی پشتیبان چندوسیله‌ای در صفحه را حل نموده است [۱۱].

یکی از مشخصه‌های پرکاربرد و مهمی که در نظریه‌های اخیر تحقیق در عملیات ظاهر شده است، مفهوم مکان‌یابی آرمانی می‌باشد. فتحعلی و همکاران، برای اولین بار یک مسئله خاص از مسئله مکان‌یابی وبر آرمانی را مطرح کردند. آن‌ها در این مسئله برای هر نقطه تقاضا، یک شعاع آرمانی را در نظر گرفته و فاصله بین تسهیلات جدید و نقاط تقاضا را دقیقاً برابر با شعاع آرمانی



متناظر با هر نقطه تقاضا، تعیین کردند. از آنجایی که در واقعیت به‌ندرت مکانی برای تسهیلات جدید وجود دارد که فاصله آن تا نقاط تقاضا دقیقاً برابر با شعاع آرمانی در نظر گرفته شود، لذا آن‌ها در این مدل به دنبال کمینه کردن تابع زیان مجموع وزنی مربعات خطا بودند. آن‌ها با استفاده از روش مربع بزرگ-مربع کوچک الگوریتمی برای حل مسئله تحت نرم اقلیدسی پیشنهاد دادند [۱۲]. سپس جمالیان و فتحعلی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله با هدف کمینه کردن مجموع وزنی قدرمطلق خطا، ارائه دادند [۱۳]. فتحعلی و جمالیان، به بررسی مسئله کمینه کردن مجموع مربعات خطا پرداخته و آن را مسئله مکان‌یابی ویرمربعی آرمانی<sup>۱۷</sup> (GSWLP) نامیدند. آن‌ها با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی پرندگان به حل مسئله فوق تحت نرم اقلیدسی پرداختند [۱۴]. اخیراً نظری و همکاران، مسئله مکان‌یابی پشتیبان چندوسيله‌ای با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای حل مسئله خود یک روش شبه-وایزفیلد ارائه نمودند [۱۵]. همچنین سلیمانی و همکاران، یک مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی را تحت نرم  $l_p$  مورد بررسی قرار دادند و سپس برای حل این مسئله الگوریتم شبه-وایزفیلد و الگوریتم گاوس-نیوتن را ارائه کردند [۱۶]. از طرفی دیگر به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت، در بیشتر مواقع یافتن مقادیر دقیق و معین برای پارامترهای مسائل مکان‌یابی امری غیرممکن می‌باشد. از این رو می‌توان از نظریه قدرتمند مجموعه‌های فازی برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت‌های موجود، به‌صورت ریاضی بهره گرفت [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱].

در تمامی تحقیقات انجام‌شده که تاکنون بر روی مسائل مکان‌یابی آرمانی انجام‌گرفته است، اولاً مقادیر تمامی متغیرهای مسئله دقیق و با قطعیت مشخص بوده‌اند و دوماً، در این مسائل از توابع زیان (خطا/جریمه) متقارن مانند مجموع مربعات خطا و یا مجموع قدر مطلق خطا استفاده شده است. درحالی‌که در بسیاری از موقعیت‌های زندگی واقعی، خطای مثبت و خطای منفی با اندازه‌های یکسان، اغلب مفاهیم متفاوت اقتصادی و مادی دارند، به عبارتی خطای مثبت ممکن است جدی‌تر یا مهم‌تر از خطای منفی باشد و یا بالعکس، در این صورت استفاده از توابع زیان متقارن مانند تابع زیان مربعات خطا و یا تابع زیان قدر مطلق خطا، که قادر به تفکیک این موضوع نمی‌باشند، نامناسب هستند. بنابراین علی‌رغم اینکه این موضوع از موضوعات بسیار کاربردی و پراهمیت می‌باشد. تاکنون تحقیق و پژوهشی با در نظر گرفتن این مشخصه‌ها انجام نگرفته است. بنابراین در این مقاله به مسئله مکان‌یابی آرمانی با وزن‌های فازی و تحت تابع زیان



نامتقارن لینکس<sup>۱۸</sup> پرداخته‌ایم تا توانسته باشیم مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در مدل ارائه‌شده بررسی نماییم. در جدول ۱، مجموعه مقالات مکان‌یابی با شعاع آرمانی را که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند، می‌توان مشاهده نمود.

جدول ۱. بررسی مسائل مکان‌یابی آرمانی

نام نویسنده‌گان	روش حل			تعداد سرویس‌دهنده		نرم فاصله			شاخص مکان‌یابی		تابع زیان			
	هندسی	وایز فیلد	گرادینتی	فرا ابتکاری	$n = 1$	$n > 1$	$l_1$	$l_2$	$l_p$	قطعییت	عدم قطعییت	قدر مطلق خطا	مربعیات خطا	نامتقارن
فتحعلی و همکاران [۱۲]	✓	-	-	-	✓	-	-	✓	-	✓	-	-	✓	-
جمالیان و فتحعلی [۱۳]	-	-	✓	-	✓	-	-	✓	-	✓	-	✓	-	-
فتحعلی و جمالیان [۱۴]	-	-	-	✓	✓	-	-	✓	-	✓	-	-	✓	-
نظری و فتحعلی [۱۵]	-	✓	-	-	-	✓	-	-	✓	-	✓	-	✓	-
سلیمانی و همکاران [۱۶]	-	✓	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	-	✓	✓	-
مقاله حاضر	-	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	-	✓



### ۳- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی توابع زیان متقارن و نامتقارن و نظریه مجموعه‌های فازی را بیان خواهیم کرد.

**تعریف ۱** [۲۲]. فرض کنید  $\delta$  یک برآورد از مقدار واقعی پارامتر  $\theta$  باشد. اگر  $D$ ، کلاس کلیه برآوردهای پارامتر  $\theta$  باشد، در برآورد  $\theta$  به وسیله برآوردگر  $\delta \in D$ ، مقدار خطای حاصل شده را با تابع زیان  $E(\theta, \delta)$  اندازه می‌گیرند که تابعی از  $\Delta = \theta - \delta$  می‌باشد. در این صورت تابع زیان  $E(\theta, \delta)$  در دو شرط زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} E(\theta, \delta) &\geq 0, \quad \forall \theta, \forall \delta \\ E(\theta, \delta) &= 0 \Leftrightarrow \theta = \delta \end{aligned} \quad (1)$$

واریان [۲۲]، در یک مطالعه کاربردی در ارزیابی مالکیت املاک و مستغلات، تابع زیان نامتقارن لینکس را که بسیار مفید واقع شد، معرفی نمود. این تابع در یک طرف مبدأ مختصات، تقریباً به صورت نمایی افزایش می‌یابد. درحالی‌که در سمت دیگر آن به صورت خطی رفتار می‌کند. بنابراین در موقعیت‌هایی که باید بین خطای مثبت و خطای منفی با اندازه‌های یکسان، تفاوت قائل باشیم، نمی‌توان از توابع زیان متقارن مانند تابع زیان مربعات خطا و یا تابع زیان قدر مطلق خطا که قادر به تفکیک این موضوع نمی‌باشند، استفاده نمود. لذا باید به دنبال یک تابع زیان نامتقارن بود. به عنوان یک مثال عینی می‌توان به این مورد اشاره نمود که در ساخت و ساز سد، کم برآورد حداکثر سطح آب، بسیار مهم‌تر و جدی‌تر از بیش برآورد آن است؛ زیرا ممکن است در اثر کم برآورد سطح آب در یک طوفان سیل‌آسا، آب پشت سد از دیواره آن بالا آمده و از آن خارج شود و خسارت‌های جانی و مالی زیادی را به همراه بیاورد. درحالی‌که بیش برآورد حداکثر سطح آب تنها ممکن است خسارت ناشی از هزینه‌های ساخت و ساز را در پی داشته باشد.

**تعریف ۲**. (تابع جریمه نامتقارن لینکس [۲۳]) فرض کنید که  $\delta$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  باشد. در این صورت تابع زیان محدب لینکس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$E_1(\Delta) = be^{a\Delta} - c\Delta - b, a, c \neq 0, b > 0 \quad (2)$$

در رابطه بالا مشاهده می‌شود که  $E_1(0) = 0$  است. همچنین برای وجود مینیمم در  $\Delta = 0$  (خطای صفر) کافی است  $ab = c$  باشد. بنابراین با این تبدیل می‌توانیم رابطه (۲) را به صورت



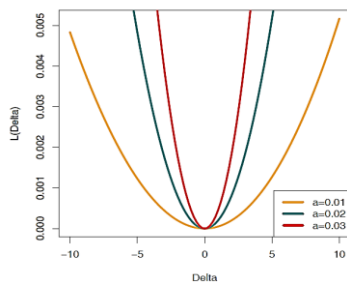
زیر بازنویسی نمائیم.

$$E_2(\Delta) = b[e^{a\Delta} - a\Delta - 1], a \neq 0, b > 0 \quad (۳)$$

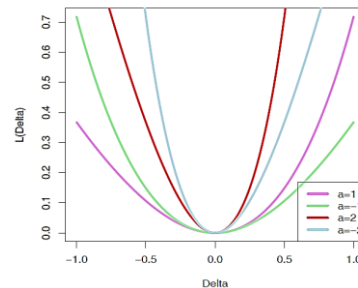
نمودار تابع زیان  $E_2(\Delta)$  را به ازای مقادیر متفاوتی از  $a$  و با فرض  $b = 1$  در شکل ۲-الف نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای  $a = 1$  تابع کاملاً نامتقارن و ارزش بیش برآورد نسبت به کم برآورد بیشتر است و برای  $a = -1$  عکس آن برقرار است. همچنین برای مقادیر کوچک  $|a|$ ، تابع زیان لینکس تقریباً متقارن است و اختلاف چندانی با تابع زیان مربع خطا ندارد. این موضوع را می‌توان در شکل ۲-ب، مشاهده نمود. آرسی [۲۳]، تعمیمی از تابع زیان لینکس را به صورت زیر بیان نمود:

$$E_3(\Delta) = \sum_{i=1}^k b_i [e^{a_i \Delta_i} - a_i \Delta_i - 1], a_i \neq 0, b_i > 0, \forall i = 1, \dots, k \quad (۴)$$

که در آن  $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k)^T$  است. این تابع جریمه محدب است و  $E_3(0) = 0$  و  $E'_3(0) = 0$  مینیمم این تابع می‌باشد.



شکل ۲-ب



شکل ۲-الف

شکل ۲. نمودار تابع جریمه لینکس نسبت به مقادیر مختلف  $a$  در حالت  $b = 1$ .

تعریف ۳ [۲۱]. عدد فازی  $\tilde{A}$  عبارت است از مجموعه فازی  $\tilde{A}$  که بر روی مجموعه مرجع





اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ )، در شرایط زیر صدق نمایند:

۱. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  مجموعه ای محدب باشد، ۲.  $h(\tilde{A}) = 1$ ، ۳. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  دارای تکیه گاه کران دار باشد.

**تعریف ۴** [۲۱]. هر عدد فازی به شکل  $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ ، عدد فازی مثلثی نامیده می شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A} = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_m - a_1} & a_1 \leq x \leq a_m \\ \frac{a_u - x}{a_u - a_m} & a_m \leq x \leq a_u \\ 0 & O.W \end{cases} \quad (5)$$

**تعریف ۵** [۲۱]. فرض کنید  $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$  و  $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ ، دو عدد فازی مثلثی مفروض و  $k$  یک عدد حقیقی باشند. در این صورت عملیات ریاضی بین اعداد فازی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \tilde{A} + \tilde{B} = \langle a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u \rangle \\ \tilde{A} - \tilde{B} = \langle a_l - b_u, a_m - b_m, a_u - b_l \rangle \\ k\tilde{A} = \begin{cases} \langle ka_l, ka_m, ka_u \rangle & k \geq 0 \\ \langle ka_u, ka_m, ka_l \rangle & k < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

**تعریف ۶** [۲۱]. فرض کنید  $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$  و  $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ ، دو عدد فازی مثلثی مفروض باشند. در این صورت می گوئیم  $\tilde{A}$  به طور نسبی از  $\tilde{B}$  کوچک تر است و با نماد  $\tilde{A} < \tilde{B}$  نشان می دهیم اگر و تنها اگر:

1.  $a_m < b_m$
2.  $a_m = b_m$  و  $(a_m - a_l) > (b_m - b_l)$
3.  $a_m < b_m$ ،  $(a_m - a_l) = (b_m - b_l)$  و  $(a_u - a_m) < (b_u - b_m)$ .

#### ۴- مسئله مکان یابی تک وسیله ای آرمانی تحت نرم $l_p$

در یک مسئله مکان یابی تک وسیله ای به دنبال پیدا کردن نقطه ای جدید در صفحه هستیم به طوری که، مجموع فاصله وزنی این نقطه تا نقاط تقاضا کمینه گردد. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نقطه موجود باشند و متناسب با هر نقطه تقاضای  $X_i$  یک شعاع آرمانی  $R_i$ ، و یک وزن مثبت



$w_i$  داشته باشیم. هدف پیدا کردن یک مکان جدید در صفحه می‌باشد به طوری که، فاصله وزنی بین این نقطه جدید تا نقاط تقاضای  $X_i$  دقیقاً برابر با شعاع  $R_i$  باشد. اما از آنجایی که در واقعیت ممکن است چنین نقطه‌ای پیدا نشود، لذا به دنبال برآورد مکانی (نقطه‌ای) هستیم به طوری که فاصله این نقطه تا نقاط تقاضای  $X_i$  تا حد امکان به شعاع  $R_i$  ها نزدیک باشد. انتخاب این مکان برآورد شده، ضرر و زیان‌هایی را نسبت به نقطه ایده‌آل در پی خواهد داشت. لذا در این مسئله به دنبال کمینه شدن زیان ناشی از انتخاب این مکان در صفحه هستیم. از این رو استفاده از تابع زیان مناسب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از طرف دیگر باید توجه داشت که در بسیاری از موقعیت‌های زندگی واقعی، خطای مثبت و خطای منفی با اندازه‌های یکسان، اغلب مفاهیم متفاوت اقتصادی و مادی دارند، به عبارتی خطای مثبت ممکن است جدی‌تر یا مهم‌تر از خطای منفی باشد و یا بالعکس، بنابراین استفاده از توابع زیان متقارن مانند تابع زیان مربع خطا یا تابع زیان قدر مطلق خطا، که قادر به تفکیک این موضوع نمی‌باشند، نامناسب هستند. حال فرض کنید که  $X_i = (a_i, b_i)$  و  $\bar{X} = (x, y)$  باشد. در این صورت یک مسئله مکان‌یابی تک‌وسیله‌ای آرمانی تحت نرم  $l_p$ ، به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود:

$$\min f_R(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E \left( d_{l_p}(\bar{X}, X_i) - R_i \right) \quad (7)$$

در رابطه بالا،  $E \left( d_{l_p}(\bar{X}, X_i) - R_i \right)$  تابع زیان می‌باشد و منظور از  $d_{l_p}(\bar{X}, X_i)$ ، فاصله بین دو نقطه  $\bar{X}$  و  $X_i$  تحت نرم  $l_p$  است و  $w_i$  وزن مربوط به هر نقطه تقاضای  $X_i$  می‌باشد. به اختصار  $d_{l_p}(\bar{X}, X_i)$  را با  $d(\bar{X}, X_i)$  نمایش می‌دهیم. از آنجایی توابع زیان مربعات خطا و قدر مطلق خطا، توابعی نامحدوب می‌باشند و از طرف دیگر، این توابع زیان متقارن بوده و قادر به ارزش‌گذاری بین خطاهای مثبت و منفی با اندازه‌هایی یکسان نمی‌باشند، لذا در این قسمت تابع زیان لینکس را که هم تابعی محدب است و هم نامتقارن می‌باشد، به عنوان تابع زیان برای مسئله تک‌وسیله‌ای آرمانی در نظر می‌گیریم. بنابراین یک مسئله تک و سیله‌ای آرمانی تحت تابع زیان نامتقارن لینکس و با نرم  $l_p$ ، به صورت زیر مدل‌بندی ریاضی می‌شود:



$$F_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \quad (8)$$

به طوری که،  $d(\bar{X}, X_i) = (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

#### ۴-۱- مسئله مکان یابی تک وسیله ای آرمانی فازی تحت نرم $l_p$

حال مسئله مکان یابی تک وسیله ای آرمانی (۸) با نرم  $l_p$  را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن ها به صورت اعداد فازی باشند. در این صورت این مسئله به مسئله فازی (۹)، تبدیل می شود:

$$\tilde{F}_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \quad (9)$$

که در آن  $\tilde{w}_i, i = 1, \dots, n$  اعداد فازی مثلثی می باشند. الگوریتم تبدیل را به صورت زیر ارائه خواهیم کرد.

#### الگوریتم تبدیل:

**گام اول:** مسئله برنامه ریزی فازی (۹) را در نظر بگیرید. به ازای  $i = 1, \dots, n$  با جایگذاری مقادیر  $\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$  مسئله برنامه ریزی زیر نتیجه می شود:

$$\min \tilde{F}_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \quad (10)$$

**گام دوم:** تابع هدف مسئله برنامه ریزی فازی (۹) را در نظر بگیرید بنا به تعریف ۶ و این نکته که  $0 \leq (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1)$  نتیجه می شود:

$$\tilde{F}_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \langle w_{il} \cdot E_3(\Delta), w_{im} \cdot E_3(\Delta), w_{iu} \cdot E_3(\Delta) \rangle \quad (11)$$

**گام سوم:** حال بنا به خاصیت جمع اعداد فازی داریم:

$$\tilde{F}_{LR}(\bar{X}) = \left\langle \sum_{i=1}^n w_{il} \cdot E_3(\Delta), \sum_{i=1}^n w_{im} \cdot E_3(\Delta), \sum_{i=1}^n w_{iu} \cdot E_3(\Delta) \right\rangle \quad (12)$$



گام چهارم: با توجه به مراحل قبل مسئله برنامه‌ریزی فازی (۱۰) به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\min \tilde{F}_{LR}(\bar{X}) = \left( \sum_{i=1}^n w_{il} \cdot E_3(\Delta), \sum_{i=1}^n w_{im} \cdot E_3(\Delta), \sum_{i=1}^n w_{iu} \cdot E_3(\Delta) \right) \quad (13)$$

حال می‌توان مسئله فازی (۱۳) را به مسئله سه هدفه قطعی زیر تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} \min \tilde{F}_{LR}^1(\bar{X}) &= \sum_{i=1}^n w_{il} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1), \\ \min \tilde{F}_{LR}^2(\bar{X}) &= \sum_{i=1}^n w_{im} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1), \quad (14) \\ \min \tilde{F}_{LR}^3(\bar{X}) &= \sum_{i=1}^n w_{iu} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1), \\ & \text{s. t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_{im} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) &\geq \sum_{i=1}^n w_{il} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \\ \sum_{i=1}^n w_{iu} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) &\geq \sum_{i=1}^n w_{im} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \end{aligned}$$

از آنجایی که  $\tilde{w}_i, i = 1, \dots, n$  اعداد فازی مثلثی می‌باشند، بنابراین برای هر  $i = 1, \dots, n$  داریم،  $w_{iu} \geq w_{im} \geq w_{il}$  از طرف دیگر  $(e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \geq 0, i = 1, \dots, n$  بنابراین داریم،  $w_{iu} \cdot E_3(\Delta) \geq w_{im} \cdot E_3(\Delta) \geq w_{il} \cdot E_3(\Delta), i = 1, \dots, n$  در نهایت بنابر خاصیت جمع برای هر  $i = 1, \dots, n$  داریم:

$$\sum_{i=1}^n w_{iu} E_3(\Delta) \geq \sum_{i=1}^n w_{im} E_3(\Delta) \geq \sum_{i=1}^n w_{il} E_3(\Delta) \quad (15)$$

رابطه (۱۵) نشان می‌دهد که مجموعه قیود مسئله برنامه‌ریزی (۱۴) به‌طور بدیهی برقرار است.

از این‌رو مسئله برنامه‌ریزی (۱۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$\begin{cases} \min F^1_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_{il} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1), \\ \min F^2_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_{im} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1), \\ \min F^3_{LR}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_{iu} (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1). \end{cases} \quad (16)$$

### ۵- الگوریتم‌های حل مسئله

در این قسمت ابتدا قضایایی را در مورد وجود جواب در مورد مسئله مکان‌یابی آرمانی تحت توابع زیان بیان شده ارائه می‌کنیم و از آنجایی که می‌توان با تغییر ضریب  $a$ ، در تابع زیان لینکس، رفتارهای توابع زیان متقارن مربع خطا و قدر مطلق خطا را شبیه‌سازی نمود، لذا با توجه به این خاصیت تابع زیان لینکس، به حل مسئله مطرح شده تحت این تابع زیان پرداخته‌ایم و دو روش الگوریتم شبه-وایزفیلد و الگوریتم فرا ابتکاری رقابت استعماری را برای حل آن پیشنهاد داده‌ایم. همچنین در حالت فازی، برای حل مسئله سه هدفه (۱۶)، الگوریتم ژنتیک سه هدفه را ارائه نموده‌ایم.

**قضیه ۱.** جواب بهینه مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی تحت تابع زیان نامتقارن لینکس و با نرم  $l_p$ ، در پوسته گسترش‌یافته مستطیلی نقاط  $X_i = (a_i, b_i)$  قرار دارد. اثبات: فرض کنید نقاط  $a_{min}$ ،  $a_{max}$ ،  $b_{min}$  و  $b_{max}$  به صورت زیر تعریف شده باشند.

$$\begin{cases} a_{min} = \min\{a_i - R_i | i = 1, \dots, n\} \\ a_{max} = \max\{a_i + R_i | i = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad \begin{cases} b_{min} = \min\{b_i - R_i | i = 1, \dots, n\} \\ b_{max} = \max\{b_i + R_i | i = 1, \dots, n\} \end{cases}$$

مجموعه نقاط  $RH_1 = (a_{min}, b_{min})$ ،  $RH_2 = (a_{min}, b_{max})$ ،  $RH_3 = (a_{max}, b_{min})$  و  $RH_4 = (a_{max}, b_{max})$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\bar{X} = (x, y)$  خارج از پوسته مستطیلی نقاط  $RH_1$ ،  $RH_2$ ،  $RH_3$  و  $RH_4$  قرار داشته باشد. در حالت اول فرض کنید  $x > a_{max}$  است. بنابراین اگر  $X' = (a_{max}, y)$  باشد در این صورت داریم،

$$d(\bar{X}, X_i) = (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} > (|a_{max} - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} = d(X', X_i) > R_i.$$



پس با توجه به رابطه بالا نتیجه می‌شود که،

$$\left( (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right) > \left( (|a_{max} - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}} - R_i \right) > 0 .$$

بنابراین با توجه به مثبت بودن ضرایب  $w_i$  داریم:

$$w_i \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) > w_i \cdot (e^{a \cdot (d(X', X_i) - R_i)} - a \cdot (d(X', X_i) - R_i) - 1)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که،  $F_{LR}(\bar{X}) > F_{LR}(X')$  بنابراین  $\bar{X} = (x, y)$  نمی‌تواند جواب بهینه باشد. برای حالت‌هایی که  $x < a_{min}$  و  $y > b_{max}$  باشد نیز به صورت کاملاً مشابه می‌توان اثبات نمود که نقاط  $\bar{X}$  نمی‌توانند جواب‌های بهینه باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب بهینه مسئله در پوسته مستطیلی حاصل از نقاط  $RH_1, RH_2, RH_3$  و  $RH_4$  قرار دارد. لم ۱. مشتقات تابع هدف مسئله مکان‌یابی با توابع هدف (۸)، ممکن است در هر جایی از صفحه تعریف نشده باشند.

با توجه به لم ۱، برای اینکه توابع هدف مسائل هدف (۸)، تابعی هموار باشد قرار می‌دهیم:

$$F_{LR}^h(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \quad (۱۷)$$

به طوری که:

$$d^h(\bar{X}, X_i) = \left( ((x - a_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} + ((y - b_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (۱۸)$$

و  $\varepsilon$  یک مقدار کوچک و مثبت است. بنابراین با توجه به روابط بالا به جای بهینه شدن رابطه (۸)، به دنبال بهینه شدن تقریب آن یعنی رابطه (۱۷)، هستیم. می‌توان لم‌های زیر را در مورد رابطه (۱۷) بیان کرد.

لم ۲. تابع هدف تقریب زده شده (۱۷)، به تابع هدف مسئله اصلی یعنی رابطه (۸)، همگرا است و داریم؛  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max\{|F_{LR}^h(\bar{X}) - F_{LR}(\bar{X})|\} \rightarrow 0$ . اثبات: با توجه به روابط (۱۷) و (۷) داریم:

$$|F_{LR}^h(\bar{X}) - F_{LR}(\bar{X})| = \left| \sum_{i=1}^n w_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) - \sum_{i=1}^n w_i \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) \right|$$



از طرفی با استفاده از نامساوی مینکوفسکی داریم:

$$\begin{aligned} & |w_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1) - w_i \cdot (e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i) - 1)| \\ &= |w_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} - a \cdot w_i (d^h(\bar{X}, X_i) - d(\bar{X}, X_i))| \\ &\leq w_i (|e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)}| + |a| |d^h(\bar{X}, X_i) - d(\bar{X}, X_i)|) \\ &\leq w_i \left( \left| e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} \left( e^{(2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} - 1 \right) \right| + |a| 2^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} & |F_{LR}^h(\bar{X}) - F_{LR}(\bar{X})| \\ & \leq \sum_{i=1}^n w_i \left| \left( e^{a \cdot (d(\bar{X}, X_i) - R_i)} \left( e^{(2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} - 1 \right) \right) \right| + |a| 2^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n w_i \\ & \max\{|F_{LR}^h(\bar{X}) - F_{LR}(\bar{X})|\} \rightarrow 0 \text{، نتیجه می شود که، } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

این لم این خاصیت را بیان می کند که مسئله تقریب زده شده به مسئله اصلی همگرا هست

بنابراین جواب مسئله تقریب زده شده به جواب مسئله اصلی همگراست.

#### ۵-۱ الگوریتم شبه-وایزفیلد

با توجه به محدب بودن تابع هدف (۱۷) و همچنین هموار بودن این رابطه می توان با استفاده از یک روش شبه-وایزفیلد، به جواب بهینه سراسری دست یافت. اگر شرط لازم بهیگی را برای تابع هدف مسئله (۱۷) در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X})}{\partial \bar{X}} = & a \left( \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{Ra_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - 1)}{DX_i} (x - \right. \right. \\ & \left. \left. a_i) \right), \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{Rb_i \cdot (e^{a \cdot (d^h(\bar{X}, X_i) - R_i)} - 1)}{DX_i} (y - b_i) \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

به طوری که داریم:



$$\begin{cases} DX_i = \left( ((x - a_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} + ((y - b_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ Ra_i = ((x - a_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \\ Rb_i = ((y - b_i)^2 + \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \end{cases} \quad (20)$$

حال با مساوی صفر قرار دادن رابطه (۱۹) داریم:

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Ra_i \left( e^{a \left( (DX_i)^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i} \right) a_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Ra_i \left( e^{a \left( (DX_i)^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Rb_i \left( e^{a \left( (DX_i)^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i} \right) b_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Rb_i \left( e^{a \left( (DX_i)^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i} \right)} \right). \quad (21)$$

بنابراین اگر  $\bar{X}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$  یک نقطه شروع اولیه باشد در این صورت  $(x^{(t+1)}, y^{(t+1)})$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Ra_i^{(t)} \left( e^{a \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right) a_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Ra_i^{(t)} \left( e^{a \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Rb_i^{(t)} \left( e^{a \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right) b_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i Rb_i^{(t)} \left( e^{a \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1}} - R_i \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right)} \right). \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲) منظور از  $t$ ، شمارنده الگوریتم در هر مرحله می‌باشد. رابطه (۲۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:





بنابراین با توجه به روابط بالا اگر قرار دهیم:

$$d^{(t)} = \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i \cdot R a_i^{(t)} \cdot \left( e^{a \cdot \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1} - R_i} \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right) (x^{(t)} - a_i), \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i \cdot R a_i^{(t)} \cdot \left( e^{a \cdot \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1} - R_i} \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right) (y^{(t)} - a_i) \right) \quad (24)$$

در این صورت به وضوح مشخص است که  $d^{(t)T} \cdot \nabla F_{LR}^h(\bar{X}^{(t)}) < 0$  است. فرض کنیم که  $W$  به صورت زیر باشد:

$$W = \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_i \cdot R a_i^{(t)} \cdot \left( e^{a \cdot \left( (DX_i^{(t)})^{\frac{1}{p-1} - R_i} \right) - 1} \right)}{DX_i^{(t)}} \right) \quad (25)$$

اگر  $W > 0$  باشد بنابراین دنباله  $y^{(t+1)}$  روی خط تندترین کاهش قرار دارد و اگر  $W < 0$  باشد دنباله  $y^{(t+1)}$  روی خط تندترین افزایش قرار دارد. لذا با توجه به مقاله [24]، در حالتی که  $W < 0$  است می توان از نقطه  $(2y^{(t)} - y^{(t+1)})$  به عنوان نقطه شروع بعدی استفاده نمود. به طور مشابه برای دنباله  $x^{(t+1)}$  نیز در صورت منفی بودن ضریب گرادیان می توان از نقطه شروع  $(2x^{(t)} - x^{(t+1)})$  استفاده نمود. بنابراین  $\{F_{LR}^h(\bar{X}^{(t)})\}$  می تواند یک دنباله غیر افزایشی باشد. سه لم زیر را می توان در مورد رابطه (23) بیان نمود:

لم 3. اگر  $\bar{X}^{(t+1)} = \bar{X}^{(t)}$  باشد در این صورت  $\frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X}^{(t)})}{\partial \bar{X}} = 0$  است.

اثبات : با توجه به رابطه (23) اگر  $\bar{X}^{(t+1)} = \bar{X}^{(t)}$  باشد در این صورت باید



$$\frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X}(t))}{\partial \bar{X}} = 0$$
 و این بدین معنی است که  $d(t)^T \cdot \frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X}(t))}{\partial \bar{X}} = 0$  است.

**لم ۴.** اگر  $\bar{X}(t+1) \neq \bar{X}(t)$  باشد در این صورت  $F_{LR}^h(\bar{X}(t+1)) < F_{LR}^h(\bar{X}(t))$

**اثبات:** اگر  $\bar{X}(t+1) \neq \bar{X}(t)$  باشد در این صورت  $\frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X}(t))}{\partial \bar{X}} \neq 0$  است. با قرار دادن  $d = -\frac{\partial F_{LR}^h(\bar{X}(t))}{\partial \bar{X}}$ ، داریم  $d^T \cdot \nabla F_{LR}^h(\bar{X}(t)) < 0$  است بنابراین نتیجه می‌شود  $F_{LR}^h(\bar{X}(t+1)) < F_{LR}^h(\bar{X}(t))$

**لم ۵.** اگر  $F_{LR}^h(\bar{X}(t+1)) = F_{LR}^h(\bar{X}(t))$  باشد در این صورت  $\bar{X}(t+1) = \bar{X}(t)$

**اثبات:** اگر  $F_{LR}^h(\bar{X}(t+1)) = F_{LR}^h(\bar{X}(t))$  باشد این بدان معنی است که برای هر  $t$ ، مسیر  $d(t)$  یک مسیر غیر کاهشی است بنابراین نتیجه می‌شود که،  $\bar{X}(t+1) = \bar{X}(t)$

حال می‌توان الگوریتم شبه- وایز فیلد را برای حل تابع هدف (۱۷)، به صورت زیر بیان نمود.

#### الگوریتم (LWA):

- گام ۱) یک تقریب اولیه ( $\bar{X}^{(0)}$ ) از جواب بهینه انتخاب کن و قرار بده  $k = 0$ .
  - گام ۲) تا زمانی برآورده نشدن شرط توقف کارهای زیر را انجام بده
    - ۱-  $x^{(t+1)}$  را از رابطه (۲۳) محاسبه کن.
    - ۲-  $y^{(t+1)}$  را از رابطه (۲۳) محاسبه کن.
  - ۳- اگر  $\left| F_{LR}^{h(k)} - F_{LR}^{h(k-1)} \right| < \varepsilon$ ، برو به گام ۳، در غیر این صورت قرار بده  $k \rightarrow k + 1$ .
- گام ۳) پایان.

باید توجه داشت که رابطه (۲۳) یک رابطه بازگشتی مبتنی بر روش نقطه ثابت است. بنابراین همگرایی این روش وابسته به نقطه شروع اولیه است. همچنین در صورتی که  $W = 0$  باشد تکرار بعدی تعریف نشده خواهد بود. بنابراین در ادامه روش فرا ابتکاری رقابت استعماری را برای حل مسئله (۱۷) بیان خواهیم کرد.

#### ۲-۵- الگوریتم فرا ابتکاری رقابت استعماری [۲۵]

روش‌های بهینه‌سازی را می‌توان به طور کلی به دو گروه روش‌های گرادینانی و روش‌های جستجو



تقسیم نمود. همانند دیگر الگوریتم‌های تکاملی، این الگوریتم نیز با تعدادی جمعیت اولیه تصادفی که هرکدام از آن‌ها یک کشور نامیده می‌شوند، شروع می‌شود. تعدادی از بهترین عناصر جمعیت (معادل نخبه‌ها در الگوریتم ژنتیک) به عنوان امپریالیست<sup>۱۹</sup> انتخاب می‌شوند. باقیمانده جمعیت نیز به عنوان مستعمره<sup>۲۰</sup>، در نظر گرفته می‌شوند. استعمارگران بسته به قدرتشان، این مستعمرات را با یک روند خاص به سمت خود می‌کشند. با شکل‌گیری امپراتوری‌های اولیه، رقابت امپریالیستی میان آن‌ها شروع می‌شود. در نتیجه، در جریان رقابت‌های امپریالیستی، به تدریج بر قدرت امپراتوری‌های بزرگ‌تر افزوده شده و امپراتوری‌های ضعیف‌تر، حذف خواهند شد. امپراتوری‌ها برای افزایش قدرت خود، مجبور خواهند شد تا مستعمرات خود را نیز پیشرفت دهند. با گذشت زمان، مستعمرات، از لحاظ قدرت به امپراتوری‌ها نزدیک‌تر خواهند شد و شاهد یک نوع همگرایی خواهیم بود. حد نهایی رقابت استعماری، زمانی است که یک امپراتوری واحد در دنیا داشته باشیم، با مستعمراتی که از لحاظ موقعیت، به خود کشور امپریالیست، خیلی نزدیک هستند. یک الگوریتم رقابت استعماری دارای مفاهیم و پارامترهایی همچون شکل‌دهی امپراتوری‌های اولیه، حرکت مستعمره‌ها به سمت امپریالیست، جابجایی موقعیت مستعمره و امپریالیست، قدرت کل یک امپراتوری، رقابت استعماری، سقوط امپراتوری‌های ضعیف و همگرایی می‌باشد. بنابراین الگوریتم رقابت استعماری را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۵].

#### الگوریتم رقابت استعماری (ICA):

- گام ۱) چند نقطه تصادفی روی تابع انتخاب کرده و امپراتوری‌های اولیه را تشکیل بده.
- گام ۲) مستعمرات را به سمت کشور امپریالیست حرکت بده.
- گام ۳) اگر مستعمره‌ای در یک امپراتوری وجود داشته باشد که هزینه‌ای کمتر از امپریالیست داشته باشد، جای مستعمره و امپریالیست را با هم عوض کن.
- گام ۴) قدرت کل یک امپراتوری را حساب کن (با در نظر گرفتن هزینه‌ی امپریالیست و مستعمراتشان).
- گام ۵) یک مستعمره از ضعیف‌ترین امپراتوری انتخاب کرده و آن را به امپراتوری‌ای که بیشترین احتمال تصاحب را دارد بده.
- گام ۶) امپراتوری‌های ضعیف را حذف کن.
- گام ۷) اگر تنها یک امپراتوری باقی‌مانده باشد توقف کن در غیر این صورت به گام ۲ برو.



جدول ۱، بیانگر پارامترهای تنظیم‌شده الگوریتم ICA در مقاله حاضر می‌باشد.

جدول ۱. پارامترهای تنظیم‌شده الگوریتم (ICA)

۵۰۰	بیشترین تعداد تکرار الگوریتم (Maxit)
۵۰	تعداد کشورهای اولیه ( $N_{country}$ )
۲	تعداد متغیرها ( $N_{var}$ )
۱۰	تعداد امپراتوری‌ها اولیه ( $N_{imp}$ )
۲	ضریب نزدیک شدن یک مستعمره به استعمارگر از جهت‌های مختلف ( $\beta$ )
$U(0,1)$	میزان انحراف یک مستعمره از مسیر مستقیم حرکت به سمت استعمارگر ( $\theta$ )
۰/۱	ضریب هزینه متوسط مستعمرات ( $\xi$ )
۰/۱	احتمال انقلاب

## ۶- نتایج محاسباتی

در این قسمت به حل مسئله مطرح‌شده می‌پردازیم. تمامی الگوریتم‌ها با نرم‌افزار Matlab R2018a، توسط لپ‌تاپی با مشخصات، Intel(R), Core™ i5-2430M, CPU, 4 GB RAM، پیاده‌سازی شده‌اند.

مثال ۱. فرض کنید چهار نقطه با مختصات  $(0,0)$ ،  $(1,0)$ ،  $(0,1)$  و  $(1,1)$  در صفحه موجود باشند و وزن مربوط به این نقاط همگی برابر با ۱ باشد. نتایج به‌دست‌آمده از حل این مثال (مثال مقاله فتحعلی [۱۲]) با الگوریتم‌های شبه-وایزفیلد و رقابت استعماری، برای تابع هدف (۱۷) و با در نظر گرفتن  $a = 1$  و  $\varepsilon = 0/001$  نسبت به سه نوع شعاع گوناگون در جدول ۲ آمده است. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم‌های پیشنهادی در این مقاله، همخوانی بسیار خوبی در مختصات و بعضاً بهتری در مقدار تابع هدف با مقاله فتحعلی [۱۲] دارد. به‌عبارت‌دیگر، با در نظر گرفتن  $a = 1$  در تابع لینکس رفتار این تابع جریمه، رفتاری مشابه رفتار تابع جریمه مربعات خطا است. بنابراین انتظار می‌رود نتایج به‌دست‌آمده در این مثال با نتایج به‌دست‌آمده از مقاله [۱۲] که تابع جریمه آن تابع جریمه مربعات خطا است، همخوانی

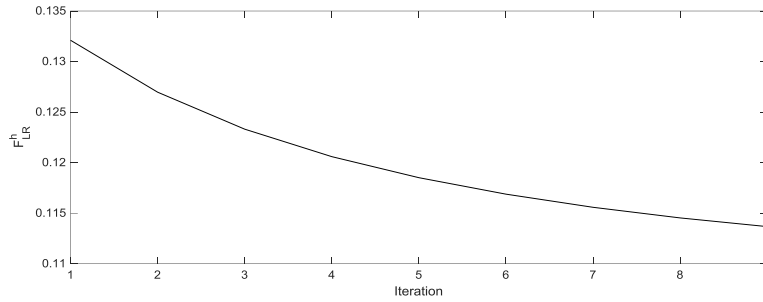


داشته باشد. همان طور که در جدول ۲ قابل مشاهده است، روش های پیشنهادی این مقاله برای شعاع آرمانی  $Radius = (1,1,1,1)$  بهتر از روش پیشنهادی در مقاله [۱۲] است. چراکه مقدار تابع هدف با روش های پیشنهادی این مقاله نسبت به مقاله [۱۲] بیشتر کاهش پیدا کرده است. و در مورد مابقی شعاع ها نیز مقادیر تابع هدف و مختصات نقاط به دست آمده با مقادیر به دست آمده از مقاله [۱۲] همخوانی خوبی دارد.

نمودار ۱، تغییرات مقدار تابع هدف مسئله را برای شعاع آرمانی  $(1,1,1,1)$  برای الگوریتم LWA نشان می دهد. همان طور که در نمودار ۱ مشاهده می شود با انتخاب نقطه شروع مناسب الگوریتم LWA بعد از تعداد تکرار محدودی (۹ تکرار) به جواب بهینه رسیده است. بنابراین در صورت انتخاب نقطه اولیه مناسب روش LWA، از لحاظ زمانی نسبت به روش ICA، از برتری بسیار بیشتری برخوردار است. این امر را می توان در جدول ۳ مشاهده نمود. در جدول ۴ نیز می توان نتایج حاصل از حل مثال ۱ را با در نظر شعاع  $Radius = (1,2,1,2)$ ، نسبت به مقادیر مختلف  $P$  مشاهده نمود. همان طور که در جدول ۴ مشاهده می شود با افزایش مقدار  $P$ ، مقدار تابع کاهش می یابد. دلیل این امر این است که با افزایش مقدار  $P$  مقدار رابطه (۸) که فاصله در نرم  $l_p$  است، کاهش می یابد و به طبع آن مقدار تابع هدف نیز کاهش می یابد. جدول ۵، تأثیرات ضریب  $a$  در تابع جریمه لینکس را نشان می دهد. با تغییر در ضریب  $a$  رفتارهای متفاوتی را شاهد هستیم، به طوری که اگر  $a = 1$  باشد رفتار این تابع مانند رفتار مسئله با تابع زیان مربعات خطا است و جواب به دست آمده نیز مشابه جواب به دست آمده در مقاله [۱۲] است.

جدول ۲. نتایج به دست آمده از حل مثال ۱ برای حالت  $P = 2$

روش حل		$Radius = (1,1,1,1)$	$Radius = (1,2,1,2)$	$Radius = (2,2,2,2)$
BSSS [۱۲]	$\bar{X}$	(0/49,0/51)	(-0/90,0/51)	(-1/42,0/51)
	$f_R(\bar{X})$	۰/۳۴	۰/۰۰	۰/۹۳
ICA	$\bar{X}$	(0/5037,0/489)	(-0/9054,0/5017)	(-1/3019,0/5890)
	$F_{LR}^h(\bar{X})$	۰/۱۵۶۴	۰/۰۰۲۱	۰/۴۴۵۳
LWA	$\bar{X}$	(0/500,0/579)	(-0/697,0/500)	(-1/561,0/500)
	$F_{LR}^h(\bar{X})$	۰/۱۱۳۸	۰/۰۲۱۲	۱/۱۰۶



نمودار ۱. نمودار تغییرات مقدار تابع هدف الگوریتم LWA برای مثال ۱، در حالت  $Radius = (1,1,1,1)$  و  $p = 2$

جدول ۳. نتایج به دست آمده از حل مثال ۱ برای حالت  $P = 2$

روش حل	ICA			LWA		
	(1,1,1,1)	(1,2,1,2)	(2,2,2,2)	(1,1,1,1)	(1,2,1,2)	(2,2,2,2)
Radius						
Cpu_time(sec)	۱۶۵/۲۱	۱۶۸/۷۲	۱۵۸/۶۴	۸/۲۵	۶/۵۴	۷/۳۴

جدول ۴. نتایج به دست آمده از داده‌های مثال ۱، نسبت به مقادیر مختلف  $P$ .

$P$	$F_{LR}$	$\bar{X}$
۱	$-۰.۶e-۸۹۶۳/۵$	(-0/499,0/5005)
۱/۵	$-۰/۰۰۲۸$	(-0/7924,0/5013)
۲	$-۰/۰۰۲۱$	(-0/9054,0/5017)
۵	$-۰.۵e-۲۲۶۱/۲$	(-0/9976,0/5047)
۱۰	$-۰.۷e-۰۴۸۱/۹$	(-1/00,0/3921)



جدول ۵. نتایج به دست آمده از داده های مثال ۱، نسبت به مقادیر مختلف  $a$  در حالت  $p = 2$

و  $Radius = (1,2,1,2)$

$a$	$F_{LR}$	$\bar{X}$
-۲	$0.3 e^{-2/7497}$	$(6/1564 - 4/2834)$
-۱	$0.3 e^{-1/9272}$	$(5/8453, -4/4514)$
۰/۰۳	$-3/8795$	$(-0/8965, 0/2846)$
+۱	$0/0021$	$(-0/9054, 0/5017)$
+۲	$4/0042$	$(-0/9046, 0/4991)$

مثال ۲. ده نقطه تقاضای  $X_i$  را که در جدول ۶ آمده است، در نظر بگیرید. فرض کنید که برای هر  $i = 1, \dots, 10$   $R_i = 1$  باشد. جدول ۷، نتایج حل سه مسئله قطعی با وزن های  $W_{im}, W_{il}, W_{iu}$  و مسئله فازی با وزن  $\tilde{W}_i = \langle W_{il}, W_{im}, W_{iu} \rangle$  را نشان می دهد. نمودارهای ۲ و ۳ نیز به ترتیب تغییرات مقدار تابع هدف و کاهش گرادیان تابع هدف را برای وزن های  $W_i = W_{il}$  تحت نرم اقلیدسی با الگوریتم ICA نشان می دهند. همان طور که از این نمودارها مشخص است، الگوریتم ICA در ۲۲ تکرار به جواب بهینه رسیده است. گرادیان تابع هدف نیز در تکرار ۲۲-م مقداری کمتر از ۰/۰۱ دارد (نمودار ۳). با توجه به عدم قطعیت موجود در وزن ها، نمی توان مقدار دقیقی برای آن ها تعیین کرد، یک حالت با درجه عضویت بالا ( $W_{im}$ ) و دو مقدار با درجه عضویت کم برای اوزان تعریف شد، درحالی که در مسئله قطعی فقط می توان مبتنی بر یکی از اوزان، مسئله را حل و بعد از تعیین جواب، مختصات نقطه بهینه را به دست آورد، در مدل فازی این امکان وجود دارد که از هر سه حالت وزن در تعیین جواب بهینه کمک گرفت و جوابی را به دست آورد که در تمام شرایط معتبر باشد. همان طور که در جدول ۷ می بینید نتیجه حل مدل در حالت فازی در زمان کمتری نسبت به هر یک از مدل های قطعی به جواب بهینه رسیده است. از طرف دیگر میانگین سه تابع هدف مدل فازی بسیار نزدیک به نتیجه حل مدل قطعی با وزن  $W_i = W_{im}$  است که حالت ایده آل وزن ها است. به عبارت دیگر مدل فازی در زمان بسیار معقول و با در نظر گرفتن هر سه وزن در تعیین جواب بهینه، مسئله را بسیار نزدیک به حالت بهینه آن حل کرده است.

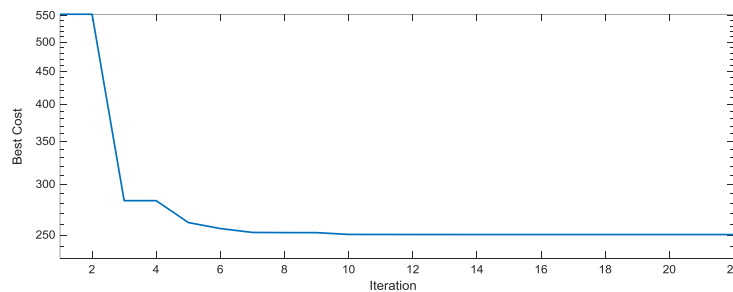


جدول ۶. داده‌های مثال ۲ در حالت فازی، برای ۱۰ نقطه تقاضا.

$i$	$X_i = (a_i, b_i)$	$\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$	$i$	$X_i = (a_i, b_i)$	$\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$
۱	)۲,۱(	)۴,۳/۵,۳(	۶	)۵,۵(	)۲,۱,۰(
۲	)۳,۱(	)۳,۲,۱(	۷	)۶,۶(	)۱/۵,۱,۰(
۳	)۵,۲(	)۲,۱,۰/۵(	۸	)۳,۶(	)۳/۵,۳,۲(
۴	)۶,۳(	)۴,۳,۲/۵(	۹	)۱,۷(	)۲/۷۵,۲,۱/۷۵(
۵	)۸,۴(	)۳,۲,۱(	۱۰	)۷,۹(	)۴,۳,۱(

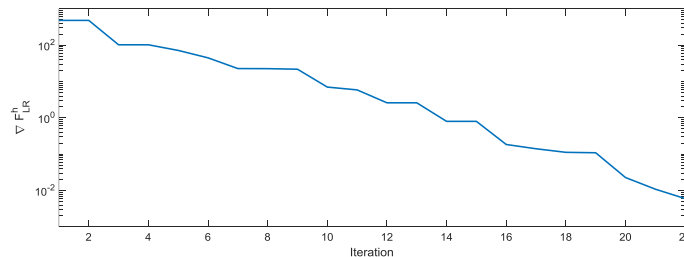
جدول ۷. نتایج به‌دست‌آمده از حل مثال ۲ برای حالت  $P = 2$  و  $a = 1$ .

ICA	$w_i = w_{il}$	$w_i = w_{im}$	$w_i = w_{iu}$	$\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$
$\bar{X}$	)۴/۷۰,۶,۴/۳۸۶۰(	)۴/۶۹۱۹,۴/۳۱۵۱(	)۴/۳۸۷۹,۴/۶۹۵۲(	)۴/۲۸۵۸,۴/۷۳۴۴(
$F_{LR}^h(\bar{X})$	۵۵۱۴/۲۵۰	۰۰۶۴/۳۱۸	۷۷۴۹/۴۱۰	$\begin{cases} F_{LR}^1(\bar{X}) = 190/0030 \\ F_{LR}^2(\bar{X}) = 343/4405 \\ F_{LR}^3(\bar{X}) = 438/8757 \end{cases}$
cpu_time	(sec)۱۳۴/۴۱	(sec)۱۷۴/۲۳	(sec)۱۸۴/۷۳	124/54(sec)



نمودار ۲. نمودار تغییرات مقدار تابع هدف الگوریتم ICA برای مثال ۲ در حالت  $p = 2$  برای  $w_i = w_{il}$ .





نمودار ۳. نمودار کاهش تابع هدف الگوریتم ICN برای مثال ۲، در حالت  $p = 2$  برای  $w_i = w_{il}$ .

## ۷- نتیجه‌گیری

در طول دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیار زیادی برای ایجاد مدل‌های مکان‌یابی‌ای که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند، انجام گرفته است. مفهوم مکان‌یابی آرمانی یکی از این مشخصه‌های پرکاربرد و مهم است. در این مقاله یک مسئله مکان‌یابی تک‌وسيله‌ای آرمانی را تحت تابع زیان نامتقارن لینکس مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این مسئله فرض بر این است که برای هر نقطه تقاضا یک شعاع آرمانی داریم و هدف پیدا کردن مکانی است که فاصله آن تا نقاط تقاضا برابر با شعاع آرمانی در نظر گرفته باشد. از آنجایی که در واقعیت به ندرت مکانی پیدا می‌شود که فاصله آن تا نقاط تقاضا دقیقاً برابر با شعاع در نظر گرفته باشد، لذا به دنبال کمینه شدن خطا هستیم. در این مقاله برای اولین بار از یک تابع زیان نامتقارن به نام تابع زیان لینکس، برای کمینه شدن این خطا استفاده نموده‌ایم. دلیل استفاده از این نوع تابع زیان نامتقارن این است که بین خطاهای مثبت و منفی با اندازه‌های یکسان تفاوت قائل است. ابتدا این مسئله را در حالت قطعی مورد بررسی قرار داده و در قالب یک قضیه نشان داده‌ایم که جواب بهینه مسئله در پوسته گسترش‌یافته مستطیلی نقاط تقاضا قرار دارد. لذا این مسئله یک مسئله شدنی و دارای جواب می‌باشد. برای به دست آوردن جواب بهینه مسئله یک الگوریتم گرادیانی شبه-وایزفیلد ارائه نموده و با بیان قضایایی نشان داده‌ایم که این الگوریتم به جواب بهینه مسئله همگرا است. برای تأیید صحت نتایج به دست آمده از این روش، جواب‌های به دست آمده از این روش را با جواب‌های به دست آمده از الگوریتم فرا ابتکاری رقابت استعماری نیز مقایسه شده است. همچنین برای اولین



بار حالت فازی این مسئله را مدل‌بندی ریاضی شده و آن را به یک مسئله سه هدفه قطعی تبدیل نموده‌ایم. به کمک الگوریتم ژنتیک سه هدفه، جواب‌های این مدل فازی به دست آمده و با مدل قطعی در قالب یک مثال مقایسه و تحلیل شده است. در حالت فازی با توجه به عدم قطعیت موجود در وزن‌ها، نمی‌توان مقدار دقیقی برای آن‌ها تعیین کرد، یک حالت با درجه عضویت بالا ( $W_{im}$ ) و دو مقدار با درجه عضویت کم برای اوزان تعریف شد. درحالی‌که در مسئله قطعی فقط می‌توان مبتنی بر یکی از اوزان، مسئله را حل و بعد از تعیین جواب، مختصات نقطه بهینه را به دست آورد، در مدل فازی این امکان وجود دارد که از هر سه حالت وزن در تعیین جواب بهینه کمک گرفت و جوابی را به دست آورد که در تمام شرایط معتبر باشد. نتیجه حل مدل در حالت فازی در زمان کمتری نسبت به هر یک از مدل‌های قطعی به جواب بهینه رسیده است. از طرف دیگر میانگین سه تابع هدف مدل فازی بسیار نزدیک به نتیجه حل مدل قطعی با وزن  $W_i = W_{im}$  است که حالت ایده‌آل وزن‌ها است. به عبارت دیگر مدل فازی در زمان بسیار معقول و با در نظر گرفتن هر سه وزن در تعیین جواب بهینه، مسئله را بسیار نزدیک به حالت بهینه آن حل کرده است.

#### ۸- پی‌نوشت‌ها

1. Like Weiszfeld Algorithm
2. Imperialist Competitive Algorithm
3. Goal Square Weber Location Problem
4. Linex
5. Imperialist
6. Colony

#### ۹- منابع

- [1] Nazari, M., Fathali, J., Reverse backup 2-median problem with variable coordinate of vertices, *Journal of Operational Research and It's Applications*, 15 (2), 2018, 63-88.
- [2] Abbasi, F., Tabriz, A. A., Selection of bank branches location based on rough set theory – multi choice goal programming, *Modern Researches in Decision Making*,



- 2 (1), 2017, 119-148.
- [3] Weber, A., *Über den Standort der Industrien*, (1929). *Tübingen*, (1909), *English Trans.: Theory of Location of Industries*, (C.J., Friedrich, ed., and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois, (1929).
- [4] Brimberg, J., The Fermat-Weber location problem revisited, *Mathematical Programming*, 71, 1995, 71-76.
- [5] Chen, R., Noniterative Solution of Some Fermat-Weber Location Problems, *Advances in Operations Research*, 2011, 10 pages.
- [6] Trinh, M. H., Lee, B.H., and Ahn, H.S., The Fermat-Weber location problem in single integrator dynamics using only local bearing angles, *Automatica*, 59, 2015, 90-96.
- [7] Mohebbi, N., Rad, A., and Motameni, A., Developing Sustainable Recovery Model Of End-Life Products (Case Study: End-Of Life Vehicle), *IJBQ*, 22 (2), 2018, 227-249.
- [8] Weiszfeld, E., Sur le point par lequel la somme des distances den points donnest minimum, *Tohoku Math*, 43, 1937, 355–386.
- [9] Miehle, W., Link-length minimization in networks, *Oper. Res.*, 6, 1958, 232–243.
- [10] Iyigun, C., Ben-Israel, A., A generalized weiszfeld method for the multifacility location problem, *Oper. Res. Lett.*, 38, 2010, 207–214.
- [11] Fathali, J., Backup multifacility location problem with  $l_p$  norm, *OPSEARCH*, 52, 2014, 382-391.
- [12] Fathali, J., Zaferanieh, M., and Nezakati, A., A BSSS algorithm for the location problem with minimum square error, *Advances in Operations Research*, Article ID 212040, 2009, 10 pages.
- [13] Jamalian, A., and Fathali, J., Linear programming for the location problem with minimum absolute error, *World Applied Sciences Journal*, 7, 2009, 1423-1427.
- [14] Fathali, J., Jamalian, A., Efficient methods for goal square Weber location problem, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 7, 2017, 65-82.



- [15] Fathali, J., Nazari, M., Solution of Backup Multifacility Location Problem by Considering the Ideal Radius for each Customer, *Journal of New Researches in Mathematics*, 5 (21), 2019, 93-104
- [16] Soleimani, A., Fathali, J., and Nazari, M., Single facility goal location problems with  $l_p$  norm, *Modern Researches in Decision Making*, 3 (4), 2019, 125-150.
- [17] Taleshian, F., Fathali, J., and Taghi-Nezhad, N. A., Fuzzy majority algorithms for the 1-median and 2-median problems on a fuzzy tree, *Fuzzy Information and Engineering*, 2018, 1-24.
- [18] Soltanpour, A., Baroughi, F. and Alizadeh, B., Intuitionistic fuzzy inverse 1-median location problem on tree networks with value at risk objective, *Soft Computing*, 17, 2019, 7843–7852.
- [19] Taghi-Nezhad, N., The p-median problem in fuzzy environment: proving fuzzy vertex optimality theorem and its application, *Soft Computing*, 23 (22) 2019, 11399–11407.
- [20] Adel Rastkhiz S E, Mobini Dehkordi A, yadollahi farsi J. Introducing a model for evaluating entrepreneurial opportunities based on fuzzy approach, *IQBQ*, 2019; 23 (1) ,75-97.
- [21] Taleshian, F. and Fathali, J., A mathematical model for fuzzy p-median problem with fuzzy weights and variables, *Advances in Operations Research*, 2016, 1-13.
- [22] Varian, H. R., *A Bayesian approach to real estate assessment*, in *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honour of Leonard J. Savage*, Amsterdam, North-Holland, 1975.
- [23] Arashi, M., Tabatabaey, S. M. M., and Khan, S., Estimation in multiple regression model with elliptically contoured errors under MLINEX loss, *Journal of Applied Probability and Statistics*, 3, 2008, 23-35.
- [24] Drezner, Zvi., Wesolowsky, G.O., The Weber problem on the plane with some negative weight, *Inform*, 29 (2), 1991, 87-99.



- [25] Gargari, A., Lucas, E. C., Imperialist Competitive Algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialist competitive, *IEEE Congress on Evolutionary computation*, Singapore, 2007.